詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 9 題

純數學 • 矩陣群

> **STEP III 樣本試卷，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q9

關鍵思路

一切都源自一個計算：把兩個這種形狀的一般矩陣相乘，看看結果是甚麼。原來乘積仍是同一形狀，各元素由一條簡單的公式給出，而這條公式幾乎不費吹灰之力就給了我們封閉性（closure）、單位元（identity）、逆元（inverse）、整數子羣（subgroup）和可交換（commute）的條件。記

$$M(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\y&z&1\end{pmatrix}.$$

解答

G 是一個羣

乘積公式。以行乘列，得

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z)=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\y&z&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a+x&1&0\\b+cx+y&c+z&1\end{pmatrix},$$

即

$$M(a,b,c)\,M(x,y,z)=M(a+x,\ b+cx+y,\ c+z). \tag{$*$}$$

封閉性。元素 $a+x$、$b+cx+y$ 和 $c+z$ 都是實數，所以乘積屬於 G。

結合律（associativity）。題目容許我們假設矩陣乘法滿足結合律。

單位元。單位矩陣是 $I = M(0,0,0)$，它屬於 G，而且對每個矩陣 M 都有 $IM = MI = M$。

逆元。給定 $M(a,b,c)$，我們要找出 $M(x,y,z)$ 使乘積為 $M(0,0,0)$。由 $(*)$，我們需要 $a+x=0$、$c+z=0$ 和 $b+cx+y=0$，所以 $x=-a$、$z=-c$ 及 $y=-b-cx=ac-b$。由於矩陣乘法不滿足交換律，另一個次序也要驗證：

$$M(-a,\, ac-b,\, -c)\, M(a,b,c) = M(0,\ (ac-b)+(-c)a+b,\ 0) = M(0,0,0).$$

所以 $M(a,b,c)^{-1} = M(-a,\, ac-b,\, -c)$，它屬於 G。

羣（group）的四條公理全部成立，所以 G 在矩陣乘法下是一個羣。

整數矩陣

設 H 為所有滿足 $x,y,z \in \mathbb{Z}$ 的 $M(x,y,z)$ 所組成的集合。它是 G 的子集，並且包含 $I = M(0,0,0)$。若 a,b,c,x,y,z 都是整數，則 $a+x$、$b+cx+y$ 和 $c+z$ 也是整數，所以由 $(*)$ 可知 H 在乘法下封閉。逆元 $M(-a,\, ac-b,\, -c)$ 的元素也都是整數，所以 H 在取逆元下封閉。結合律則由 G 承襲而來。所以答案是**是**，H 是 G 的子羣。

> **想一想** 為甚麼單靠乘法下的封閉性並不足夠？

對於無限子集，這是可以出錯的：x,y,z 為非負整數的矩陣 $M(x,y,z)$ 在乘法下封閉，但 $M(1,0,0)$ 的逆元是 $M(-1,0,0)$，並不在該集合之內。在這裏，逆元公式令我們始終留在整數之內，正是這一點使 H 成為子羣。

與所有元素可交換的元素

取 $A = M(a,b,c)$ 和一般的 $B = M(x,y,z)$。由 $(*)$，按兩個次序分別相乘，得

$$AB = M(a+x,\ b+cx+y,\ c+z), \qquad BA = M(x+a,\ y+za+b,\ z+c).$$

第一個和第三個元素必定相同，所以

$$AB = BA \iff cx = az.$$

（特別地，G 不是阿貝爾羣（abelian group）：$M(1,0,0)$ 與 $M(0,0,1)$ 不可交換。）

要 A 與每一個 B 可交換，我們需要對所有實數 x 和 z 都有 $cx = az$。取 $x=1$、$z=0$ 得 $c=0$；取 $x=0$、$z=1$ 得 $a=0$。反過來，若 $a=c=0$，則對所有 x,z 都有 $cx = 0 = az$。所以與整個 G 可交換的元素恰好是

$$A = M(0,b,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

有，這樣的 A 存在：任何 $b \neq 0$ 都給出 $A \neq I$，例如 $A = M(0,1,0)$。由 $(*)$，對 G 中每一個 $B = M(x,y,z)$ 都有 $M(0,1,0)\,M(x,y,z) = M(x,\,1+y,\,z) = M(x,y,z)\,M(0,1,0)$。

驗算

- G 中每個矩陣都是下三角（lower triangular）矩陣，而且對角線上全是一，所以它的行列式（determinant）為 1，必定可逆：我們求得的逆矩陣必然存在，而且同樣是這種形狀。
- 數值驗算：取 $A = M(2,3,5)$ 和 $B = M(1,0,0)$，由 $(*)$ 得 $AB = M(3,8,5)$，但 $BA = M(3,3,5)$，所以 A 與 B 不可交換，正如 $cx = 5 \neq 0 = az$ 所預測的一樣。我們亦以分數作精確運算，用數千個隨機矩陣驗證了乘積公式、逆元公式和可交換的條件。

常見錯誤

- 只驗證一邊的逆元。在非阿貝爾的情況下，值得把兩個乘積都確認一次（或者指出對方陣而言，單邊逆元自動就是雙邊逆元）。
- 以「G 不是阿貝爾羣，所以沒有」來回答最後一部分。非阿貝爾羣仍然可以有與所有元素可交換的非單位元元素，而這個羣正是如此。
- 忘記逆命題：證明了 $a = c = 0$ 是必要條件之後，我們還須驗證這樣的 A 確實與每一個 B 可交換。

STEP 之外

這就是*海森堡羣*（*Heisenberg group*），而與所有元素可交換的元素組成它的*中心*（*centre*）$Z(G)$，在這裏就是矩陣 $M(0,b,0)$，相當於實數在加法下所成的羣的一個複本。整數版本 H 是離散海森堡羣，是羣論和幾何學中備受喜愛的例子；海森堡羣本身則透過位置與動量的對易關係出現在量子力學之中。關於羣、子羣和中心，可參閱 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。