詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 8 題

純數學 • 向量與柯西–施瓦茲不等式

STEP III 樣本試卷，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q8

關鍵思路

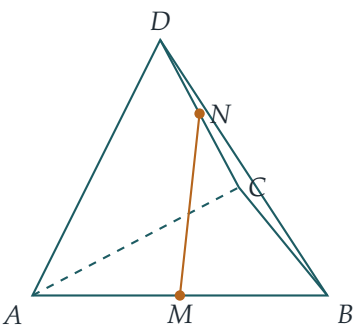
在第 (i) 部分，先為四個頂點設定位置向量（position vector）。我們需要的每一個長度，都是這些向量的某個簡單組合的模（modulus），而長度的平方就是可以展開的點積（dot product）。於是兩邊都會化成同一個式子，而大部分的整理工作都可以靠對稱性（symmetry）完成。在第 (ii) 部分，左邊看起來像是與固定向量 $(3, 2, 6)$ 的點積，而這個向量的長度剛好是整數。這正是柯西－施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality）大派用場的地方。

解答

第 (i) 部分

設四面體（tetrahedron）為 $ABCD$，各頂點相對於任意原點的位置向量為 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$。它的六條棱可分成三對對棱（即沒有公共頂點的棱）：

$$AB \text{ 與 } CD, \qquad AC \text{ 與 } BD, \qquad AD \text{ 與 } BC.$$



考慮 AB、CD 這一對：兩條棱的中點分別是 $M = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ 和 $N = \frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$，所以

$$MN^2 = \tfrac{1}{4}\,|\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.$$

另外兩條中線（midline）可用同樣方法求得，因此三條中線的平方和的四倍是

$$S = |-\mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}+\mathbf{d}|^2 + |-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{d}|^2.$$

利用 $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ 展開每一項。每一項都給出 $|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2$，另加交叉項 $\pm 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$；若 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 在該項中同號，交叉項便取正號。

> **想一想** 把三項的交叉項加起來，結果會怎樣？

任取一對頂點，例如 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$。它們在第一項中同號，在另外兩項中異號，所以它們的交叉項合共是 $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。每一對頂點都是如此：三項中的每一項都把四個頂點分成兩對（一對頂點連同與它相對的一對），而每一對頂點恰好只在三項中的其中一項同號。因此

$$S = 3(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+|\mathbf{d}|^2) - 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}).$$

現在看各條棱。例如 $AB^2 = |\mathbf{b}-\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$。把六條棱全部加起來：每個頂點都在三條棱上，所以每個 $|\mathbf{a}|^2$ 出現三次，而每一對頂點給出一個 $-2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$：

$$AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2 = 3\sum|\mathbf{a}|^2 - 2\sum_{\text{各對}}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = S.$$

所以各棱的平方和，等於連接對棱中點的三條線段的平方和的四倍，這正是所要證明的結果。

第 (ii) 部分

取

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}, \qquad \text{於是} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3x+2y+6,$$

其中 $|\mathbf{a}| = \sqrt{9+4+36} = 7$，$|\mathbf{b}| = \sqrt{x^2+y^2+1}$。由於任何實數都不大於它的絕對值，

$$3x+2y+6 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \le |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| = 7\sqrt{x^2+y^2+1},$$

這就是所求的不等式。

等號成立的情況。兩步都必須取等號。

- $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ 恰好在 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 平行時成立，因為 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$，而我們需要 $|\cos\theta| = 1$。由於 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$，這表示存在某個 λ 使得 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$。比較第三個分量得 $1 = 6\lambda$，所以 $\lambda = \frac{1}{6}$，而 $x = \frac{1}{2}$，$y = \frac{1}{3}$。

- $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 需要 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$。這裏 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lambda|\mathbf{a}|^2 = \frac{49}{6} > 0$，所以這一步也成立。

直接驗證：當 $x = \frac{1}{2}$，$y = \frac{1}{3}$ 時，左邊是 $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 6 = \frac{49}{6}$，右邊是 $7\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 1} = 7 \cdot \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$。所以等號成立當且僅當

$$x = \tfrac{1}{2}, \qquad y = \tfrac{1}{3}.$$

驗算

- 對於棱長為 1 的正四面體（regular tetrahedron），六條棱的平方和是 6。把它的頂點放在邊長為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的正方體上相間的四個頂點，每條中線都連接一對相對的面的中心，所以長度是 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$。
- 以 10^4 個隨機四面體作數值測試，結果與恆等式吻合，誤差只在捨入誤差範圍之內。至於 (ii)，$7\sqrt{x^2+y^2+1} - (3x + 2y + 6)$ 在 2×10^5 個隨機點上都是正數，而它在一個細密網格上的最小值出現在 $(0.5, 0.335)$，接近 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$，而在該點它的值是 0。

常見錯誤

- 漏掉 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 這一步，或者在討論等號成立的情況時忽略了它。在這題中因為 $\lambda > 0$，這一步不會出問題，但仍然必須檢查：假如 $\lambda < 0$，兩邊的正負號就會不同。
- 用了 $(3,2,6)$ 和 $(x,y,1)$，卻沒有把 $|\mathbf{a}|$ 算成 7。這題是特意設計的，使 $3^2 + 2^2 + 6^2$ 是一個完全平方數。

STEP 之外

第 (i) 部分是平行四邊形恆等式（parallelogram law）$|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$ 在三維空間中的近親。事實上，三條中線相交於形心（centroid），並且互相平分。第 (ii) 部分就是柯西－施瓦茨不等式，它在任何內積空間（inner-product space）中都成立，包括由函數組成的空間，在那裏它可以用來估計積分的上界。想在更廣闊的背景下認識這兩個想法，Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）是很好的起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。