詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 7 題

純數學 • 降階法

> **STEP III 樣本試卷，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q7

關鍵思路

當一條二階線性方程（second-order linear equation）含有 x^2y''、xy' 和 y 時，最自然的做法是試 x 的冪：這樣每一項都會變成 x^α 的倍數，而方程就化為關於 α 的條件。一旦知道一個解 y_1，設 $y = y_1 v$ 就是*降階法*（reduction of order）：只含 v 本身的各項會互相抵消，剩下一條關於 v' 的一階方程。

解答

冪函數解

試 $y = x^\alpha$（取 $x > 0$，使 x^α 對任意實數 α 都有意義）。則 $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ 及 $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$，所以

$$xy' - y = (\alpha-1)x^\alpha, \qquad x^2y'' = \alpha(\alpha-1)x^\alpha.$$

代入後得

$$x^2y'' + (x-2)(xy'-y) = [\alpha(\alpha-1) + (x-2)(\alpha-1)]x^\alpha = (\alpha-1)(\alpha+x-2)\,x^\alpha.$$

要使上式對*所有* x 都等於零，括號內的式子必須恆等於零。因子 $\alpha + x - 2$ 取決於 x，不可能恆等於零；因此 $\alpha = 1$。

所以 $y = x$ 是一個解，而這一點可以直接看出：$y'' = 0$ 且 $xy' - y = x - x = 0$。於是任何倍數 $y = Ax$ 也是解，這就是所謂解「與 x^α 成正比」的意思。

通解

按照提示，設 $y = xv$，其中 v 是 x 的函數。則

$$y' = v + xv', \qquad y'' = 2v' + xv'',$$

而方程中出現的那個組合可以化簡得很漂亮：

$$xy' - y = xv + x^2v' - xv = x^2v'.$$

代入方程，

$$\begin{aligned} 0 &= x^2(2v' + xv'') + (x-2)x^2v' \\ &= x^2(xv'' + 2v' + xv' - 2v') \\ &= x^3\,(v'' + v'). \end{aligned}$$

想一想 為甚麼所有只含 v 本身（不帶導數）的項都消失了？

因為 $y = x$ 是一個解：假如 v 是常數，$y = xv$ 就是 x 的倍數，左邊便等於零。所以只有 v' 和 v'' 能夠留下來。降階法之所以行得通，正是這個原因，而這也是檢查代數運算的好方法。

在任何不包含 0 的區間上，我們可以除以 x^3，得到

$$v'' + v' = 0.$$

這是關於 $w = v'$ 的一階方程：$w' = -w$，所以 $w = Be^{-x}$，其中 B 為常數。再積分一次（並把正負號併入常數之中），

$$v = A + Be^{-x}.$$

因此通解（general solution）為

$$\boxed{y = Ax + Bxe^{-x}}$$

其中 A 和 B 為任意常數。它含有兩個任意常數，二階線性方程的通解必須如此，而且 x 與 xe^{-x} 這兩部分並非彼此的倍數。

直接驗證新的那一部分：$y = xe^{-x}$ 給出 $y' = (1-x)e^{-x}$ 及 $y'' = (x-2)e^{-x}$，所以

$$x^2y'' + (x-2)(xy' - y) = (x-2)e^{-x}[x^2 + x(1-x) - x] = 0.$$

關於 $x = 0$ 的一點說明。y'' 的係數在 $x = 0$ 處等於零，所以我們只在遠離 0 的地方除以 x^3。原則上，在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 兩邊可以取不同的常數；但每一個這樣的函數都有 $y(0) = 0$、$y'(0^{\pm}) = A_{\pm} + B_{\pm}$ 及 $y''(0^{\pm}) = -2B_{\pm}$，所以要使 y 在 0 處二階可導，必須有 $B_+ = B_-$，繼而 $A_+ = A_-$。因此 $y = Ax + Bxe^{-x}$ 在整條實數線上也是通解。

驗算

- 如上所述，把 $y = x$ 和 $y = xe^{-x}$ 分別代回方程：兩者都得出零。
- 數值驗算：由 $x = 1$ 出發，以 $y(1) = y_0$、$y'(1) = y_1$ 逐步求解方程，公式預測 $A = y_1$、$B = (y_0 - y_1)e$。取 $y_0 = 2$、$y_1 = 1$，得 $y(4) = 4 + 4e^{-3} \approx 4.199$；以四階龍格—庫塔法（Runge–Kutta）作數值積分，對若干個隨機初始值，結果的誤差都小於 10^{-8}。

常見錯誤

- 由因子 $(\alpha + x - 2)$ 得出 $\alpha = 2 - x$：α 必須是常數，所以這個根不可取。
- 對 $y = xv$ 求 y'' 時出錯（應為 $2v' + xv''$，而不是 $v' + xv''$）。如果含 v 的項沒有抵消，就表示求導時出了錯。
- 停在 $v' = Be^{-x}$，在積分求 v 時忘記第二個常數。

STEP 之外

降階法適用於任何二階線性方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$：已知一個解 y_1，代換 $y = y_1 v$ 總會給出一條關於 v' 的一階線性方程，而第二個解可以寫成一個涉及 y_1 和 p 的積分。它與朗斯基行列式（Wronskian）和阿貝爾（Abel）公式關係密切，而在 $x = 0$ 這類點上試 x^{α}，正是以弗羅貝尼烏斯（Frobenius）方法求級數解的第一步。以上內容在 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）中都有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。