詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 6 題

純數學 • 雙曲函數歸約公式

STEP III 樣本試卷，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q6

關鍵思路

被積函數（integrand）$\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u$ 可以很自然地拆成 $\sinh u$ 乘以 $\sinh u\operatorname{sech}^{n+2}u$，而第二個因子除了一個常數倍之外，正是 $\operatorname{sech}^{n+1}u$ 的導數（derivative）。這樣一來，分部積分法（integration by parts）就是順理成章的做法。至於歸約公式（reduction formula），恆等式 $\cosh^2 u-\sinh^2 u=1$ 讓我們可以把同一個積分改寫成兩個 I 之差。

解答

積分恆等式

首先求一個稍後要用的導數。由於 $\operatorname{sech}u=(\cosh u)^{-1}$，由鏈式法則（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{sech}^{n+1}u=-(n+1)\cosh^{-n-2}u\,\sinh u=-(n+1)\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u.$$

因此我們取以下各項作分部積分：

$$f=\sinh u,\qquad g'=\operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh u,\qquad \text{於是}\qquad f'=\cosh u,\qquad g=-\frac{\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}.$$

由此得

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2}u\,\sinh^2 u\,\mathrm{d}u&=\Big[-\frac{\sinh u\operatorname{sech}^{n+1}u}{n+1}\Big]_0^\infty+\frac{1}{n+1}\int_0^\infty \cosh u\operatorname{sech}^{n+1}u\,\mathrm{d}u\\&=-\frac{1}{n+1}\Big[\tanh u\operatorname{sech}^n u\Big]_0^\infty+\frac{1}{n+1}\int_0^\infty \operatorname{sech}^n u\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

當中用到 $\sinh u\operatorname{sech}^{n+1}u=\tanh u\operatorname{sech}^n u$ 及 $\cosh u\operatorname{sech}^{n+1}u=\operatorname{sech}^n u$。

想一想 為甚麼邊界項（boundary term）會消失？$n > 0$ 這個條件又在哪裏用到？

當 $u = 0$ 時，$\tanh 0 = 0$。當 $u \to \infty$ 時，$\tanh u \to 1$，而 $\operatorname{sech} u = 2/(e^u + e^{-u}) \to 0$，所以 $\operatorname{sech}^n u \to 0$，原因正是 $n > 0$。（若 $n = 0$，該項會趨向 1，而不是 0。）同一個事實 $\operatorname{sech}^n u < 2^n e^{-nu}$ 亦說明了 I_n 在 $n > 0$ 時收斂（converge）。因此邊界項為零，而

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \sinh^2 u \, du = \frac{1}{n+1} I_n,$$

這正是所要證明的結果。

歸約公式

現在用第二種方法計算同一個積分。由於 $\sinh^2 u = \cosh^2 u - 1$，

$$\operatorname{sech}^{n+2} u \sinh^2 u = \operatorname{sech}^{n+2} u \cosh^2 u - \operatorname{sech}^{n+2} u = \operatorname{sech}^n u - \operatorname{sech}^{n+2} u.$$

兩部分在 $[0, \infty)$ 上的積分都收斂（因為 $n > 0$），所以

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}^{n+2} u \sinh^2 u \, du = I_n - I_{n+2}.$$

與第一個結果比較，

$$I_n - I_{n+2} = \frac{1}{n+1} I_n \quad \Longrightarrow \quad I_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) I_n = \frac{n}{n+1} I_n,$$

即 $(n+1) I_{n+2} = n I_n$，這正是所要證明的結果。

I_6 的值

歸約公式每次把 n 增加 2，所以我們需要一個 n 為偶數的起始值。最容易計算的是

$$I_2 = \int_0^\infty \operatorname{sech}^2 u \, du = \Big[\tanh u\Big]_0^\infty = 1 - 0 = 1.$$

（我們不能由 I_0 開始：它發散（diverge），而且在公式中代入 $n = 0$ 會得出 $I_2 = 0$ 這個錯誤的結論。這正是 $n > 0$ 發揮作用的地方。）於是

$$I_4 = \frac{2}{3} I_2 = \frac{2}{3},$$
$$I_6 = \frac{4}{5} I_4 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}.$$

所以

$$I_6 = \frac{8}{15}.$$



驗算

- 數列 $I_2, I_4, I_6 = 1, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}$ 是遞減的，這是必然的：$0 < \operatorname{sech} u \leq 1$，所以冪次愈高，數值愈小。
- 若改由 $I_1 = \int_0^\infty \operatorname{sech} u \, \mathrm{d}u = \left[2 \arctan(\mathrm{e}^u)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$ 開始，公式給出 $I_3 = \frac{1}{2} I_1 = \frac{\pi}{4}$，與直接作數值積分的結果吻合。
- 在 $[0, 60]$ 上使用辛普森法則（Simpson's rule）得 $I_6 \approx 0.5333333$，與 $\frac{8}{15}$ 相符；對於非整數的 n，例如 $n = 0.5$ 和 $n = 2.5$，恆等式和歸約公式同樣通過數值檢驗。

常見錯誤

- 在 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \operatorname{sech}^{n+1} u$ 中弄錯正負號或因子 $n+1$：$\operatorname{sech} u$ 在 $u > 0$ 時遞減，所以導數必定是負數。
- 沒有說明邊界項為何在無窮遠處消失。這是唯一需要用到條件 $n > 0$ 的地方。
- 把答案寫成 $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_2$，卻沒有計算 I_2 的值。

STEP 之外

這類歸約公式與沃利斯公式（Wallis's formula）結構相同：設 $t = \tanh u$（或 $\sin \theta = \tanh u$，即古德曼代換（Gudermannian substitution)），I_n 便化為 $\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} \theta \, \mathrm{d}\theta$，而所得的遞推關係（recurrence）正是沃利斯（Wallis）的遞推關係。到了大學，這些積分會以貝塔函數（Beta function）的值再次出現，$I_n = \frac{1}{2} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$，從而把遞推關係推廣至所有實數 $n > 0$；而我們處理邊界項時的謹慎態度，正是反常積分（improper integral）理論的起點。若想看嚴謹的論述，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*；若想找更多同類風格的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。