詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 5 題

純數學 • 方程根的計數

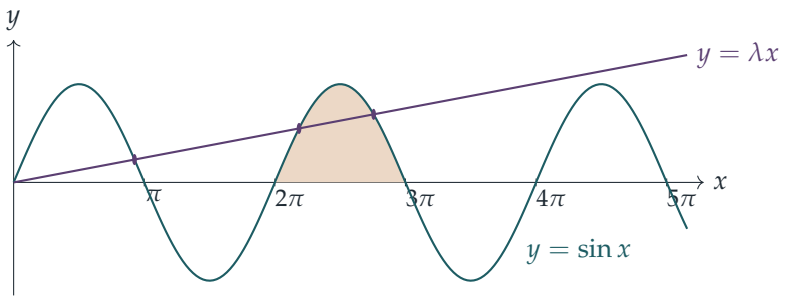
STEP III 樣本試卷，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q5

關鍵思路

把直線 $y = \lambda x$ 與曲線 $y = \sin x$ 畫在一起：方程的解就是兩者的交點。直線只能在 $\sin x > 0$ 的地方與曲線相交，即在正的「拱」$((2n-2)\pi, (2n-1)\pi)$ 上；又因為 $\sin x$ 在每個拱上都是凹（concave）的，直線與一個拱要麼相交兩次，要麼完全不相交（第一個拱除外，因為它從原點開始）。至於 ϵ 很小時的估算，用麥克勞林級數（Maclaurin series）$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ 就可以了。



（圖中 $\lambda = 0.08$：第一個拱上有一個交點，塗上陰影的第二個拱上有兩個交點，而直線在第三個拱到達頂點之前已升至 1 以上，所以 $N = 3$。）

解答

第 (i) 部分

$\lambda > 1$ **時無解**。曲線 $y = \sin x$ 的斜率（gradient）為 $\cos x \leq 1$，並且通過原點，而直線 $y = x$ 是它在原點的切線（tangent）。當 $x > 0$ 時，我們有 $\sin x < x$（函數 $x - \sin x$ 在

0 處的值為零，其導數（derivative）$1-\cos x \geq 0$ 只在孤立的點上等於零，所以它嚴格遞增（strictly increasing））。從圖像來看，當 $x>0$ 時，曲線嚴格位於其切線 $y=x$ 的下方，而若 $\lambda>1$，直線 $y=\lambda x$ 在該處位於 $y=x$ 的上方。因此

$$\sin x < x < \lambda x \qquad \text{對所有} x>0,$$

故此沒有非零解。

$\lambda = 1-\epsilon^2$ 的情況。當 $x>0$ 時，方程等價於

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\epsilon^2.$$

首先，解存在，而且只有一個。在 $(0,\pi]$ 上，函數 $\frac{\sin x}{x}$ 是連續（continuous）的，當 $x\to 0^+$ 時趨向 1，在 $x=\pi$ 處等於 0，所以它在 $(0,\pi)$ 內某處取值 $1-\epsilon^2$；它在該區間上嚴格遞減（由原點連到凹拱上一點的直線，會隨着該點沿拱移動而變得愈來愈平緩），所以這種情況只出現一次。當 $x\geq\pi$ 時再沒有其他解：因為 ϵ 很小，所以 $\lambda x \geq (1-\epsilon^2)\pi > 1 \geq \sin x$。

現在來確定它的位置。利用 $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots$，

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots = 1-\epsilon^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \cdots = \epsilon^2.$$

? **想一想** 為甚麼可以捨去 x^4 項？我們還未知道 x 是否很小。

當 $\epsilon\to 0$ 時，$\frac{\sin x}{x}\to 1$，而由於 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上由 1 開始嚴格遞減，這個根必定趨向 0。所以當 ϵ 很小時，根也很小，於是 x^4 與 x^2 相比可以忽略。取首階近似，$x^2/6=\epsilon^2$，所以

$$x \approx \epsilon\sqrt{6}.$$

（若保留下一項，$x^2 \approx 6\epsilon^2 + \frac{6}{120}(6\epsilon^2)^2$，可得更精確的結果 $x\approx \epsilon\sqrt{6}\left(1+\frac{3}{20}\epsilon^2\right)$。）

第 (ii) 部分

設 $g(x)=\sin x-\lambda x$，則方程的解就是 g 在 $x>0$ 時的零點。由於當 $x>0$ 時 $\lambda x>0$，每個解都滿足 $\sin x>0$，所以它必定位於其中一個拱

$$A_n = \big((2n-2)\pi,\,(2n-1)\pi\big), \qquad n=1,2,3,\ldots$$

之上。

第一個拱。在原點處，直線的斜率為 $\lambda<1$，比曲線的斜率小，所以直線起初在曲線下方；在 $x=\pi$ 處，直線則在曲線上方（$\lambda\pi>0=\sin\pi$）。由於 $\sin x$ 在 A_1 上是凹的，而直線是直的，兩者在該處恰好相交一次。所以 A_1 上恰好有一個解，它必定是 x_1，並且 $0<x_1<\pi$。

其後的拱。在 $A_{n+1} = (2n\pi, (2n+1)\pi)$ 上，其中 $n \geq 1$，有 $g''(x) = -\sin x < 0$，所以 g 是凹的，最多有兩個零點。在拱的兩端，$\sin x = 0 < \lambda x$，所以該處 $g < 0$。g 的最大值出現在 $g'(x) = \cos x - \lambda = 0$ 之處，即 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$，而且 $c_n < (2n + \frac{1}{2})\pi$，因為當 $\lambda > 0$ 時 $\arccos\lambda < \frac{\pi}{2}$。由此可知，$g$ 在 $(2n\pi, c_n)$ 上遞增，在 $(c_n, (2n+1)\pi)$ 上遞減，所以：

- 若 $g(c_n) < 0$，直線與這個拱不相交；
- 若 $g(c_n) = 0$，直線與這個拱相切於一點；
- 若 $g(c_n) > 0$，則恰好有兩個解，一個在 $(2n\pi, c_n)$ 內，另一個在 $(c_n, (2n+1)\pi)$ 內。

此外，直線一旦與某個拱不相交，便與其後所有的拱都不相交：若 $x \in A_{n+2}$，則 $x - 2\pi \in A_{n+1}$，所以 $\sin x = \sin(x - 2\pi) < \lambda(x - 2\pi) < \lambda x$。

所以，與直線相交的拱是 $A_1, A_2, \ldots$ 直至最後某一個，它們分別貢獻 $1, 2, 2, \ldots$ 個解，其後可能還有一個切點（tangency）。由於 $N = 2R + 1$ 是奇數，所以沒有切點，而與直線相交的拱恰好是 $A_1, \ldots, A_{R+1}$。把各個解由小至大排列，拱 A_{n+1} $(1 \leq n \leq R)$ 包含 x_{2n} 和 x_{2n+1}，並且

$$2n\pi < x_{2n} < c_n < (2n + \tfrac{1}{2})\pi, \qquad 2n\pi < x_{2n+1} < (2n+1)\pi.$$

第一個不等式給出題目所求不等式的第二行。把 x_{2n+1} 寫成 $x_{2(n+1)-1}$，第二個不等式連同 $0 < x_1 < \pi$，便給出 $(2m-2)\pi < x_{2m-1} < (2m-1)\pi$，其中 $m = 1, \ldots, R+1$。這就是所求的結果。

估算 N。當 λ 很小時，直線與很多個拱相交，所以 $R \geq 1$。在 x_{2R} 處，我們有 $\lambda x_{2R} = \sin x_{2R} \leq 1$，而由上文可知 $x_{2R} > 2R\pi$，所以

$$2R\pi\lambda < 1.$$

另一方面，直線與 $A_{R+2} = \big((2R+2)\pi, (2R+3)\pi\big)$ 不相交。在這個拱的中點 $(2R + \frac{5}{2})\pi$ 處，我們有 $\sin x = 1$，所以必須有 $\lambda(2R + \frac{5}{2})\pi > 1$（否則該處 $g \geq 0$，直線便會與這個拱相交）。把兩者合併，

$$\frac{1}{2\pi\lambda} - \frac{5}{4} < R < \frac{1}{2\pi\lambda}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{1}{\pi\lambda} - \frac{3}{2} < N < \frac{1}{\pi\lambda} + 1.$$

當 λ 非常小時，$\frac{1}{\pi\lambda}$ 非常大，相比之下這個有界的誤差可以忽略，所以

$$N \approx \frac{1}{\pi\lambda}.$$

這是合理的：直線在 $x = 1/\lambda$ 處到達高度 1，而在這一點之前，$\sin x$ 大約有 $\frac{1}{2\pi\lambda}$ 個完整的週期，每個週期貢獻兩個交點。

驗算

- 取 $\epsilon = 0.01$（$\lambda = 0.9999$），用二分法（bisection）求得根為 0.0244953，而 $\epsilon\sqrt{6} = 0.0244949$；兩者之比為 1.000015，正好就是 $1 + \frac{3}{20}\epsilon^2$ 這個修正。
- 當 $\lambda = 0.001$ 時，電腦找到 $N = 317$ 個根，而 $\frac{1}{\pi\lambda} \approx 318.3$；當 $\lambda = 0.01$ 時，電腦找到 31 個根，而估算值為 31.8。就多個 λ 值所找到的全部根，都符合 (ii) 的區間不等式，而 N 也落在上述的界限之內。
- 當 $\lambda = 1.0001$、1.1、2 或 5 時，找不到任何根。

常見錯誤

- 忘記了 x_1 獨自位於第一個拱上：原點也是一個交點，所以這個拱只貢獻一個非零解，而不是兩個。
- 沒有給出理由，便把 x_{2n} 放在所屬拱的前半部分。關鍵在於 g 要過了 $c_n = 2n\pi + \arccos\lambda$ 之後才開始遞減，而這一點位於 $\sin x$ 的頂點之前。

STEP 之外

近似式 $x \approx \epsilon\sqrt{6}$ 是漸近展開（asymptotic expansion）的第一步，而在截斷級數之前先論證根必定很小，正是分析課程所要求的那種嚴謹。利用凹性、單調性（monotonicity）和中間值定理（intermediate value theorem）來數算解的個數，是大學一年級分析課的標準內容；參看 Abbott 的 *Understanding Analysis*。一個相關的經典例子是 $\tan x = x$，它的根趨近 $(n + \frac{1}{2})\pi$，並且出現在熱傳導和振動問題之中。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。