詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 4 題

純數學 • 拋物線的切線

> **STEP III 樣本試卷，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q4

關鍵思路

一條直線與拋物線（parabola）相切，當且僅當把直線方程代入拋物線方程後，所得的二次方程有重根（repeated root）。因此第一部分只是一行的判別式（discriminant）計算，並且給出一族以 t 標記的切線（tangent）。至於第二部分，可把從某定點所作的切線，看成滿足某個二次方程的 t 值：這樣一來，有關 L 和 M 的一切都可以用兩根之和與兩根之積表示，而這兩個量可直接從係數讀出。

解答

切線

由直線方程得 $x = ty - at^2$。代入 $y^2 = 4ax$ 得

$$y^2 = 4aty - 4a^2t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2 - 4aty + 4a^2t^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (y - 2at)^2 = 0.$$

這個關於 y 的二次方程有重根 $y = 2at$，所以直線與拋物線恰好交於一點，而且重數為二：直線與拋物線相切。（它並不是與拋物線的軸平行的直線——那種直線也只與拋物線相交一次——因為它不是水平線；當 $t = 0$ 時，它是直線 $x = 0$，即頂點處的切線。）對應的 x 為 $x = t(2at) - at^2 = at^2$，所以切點是

$$(at^2,\ 2at).$$

作為覆核，對 $y^2 = 4ax$ 作隱函數求導（implicit differentiation），得在該點 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2a}{y} = \frac{1}{t}$，這正是 $ty = x + at^2$ 的斜率。

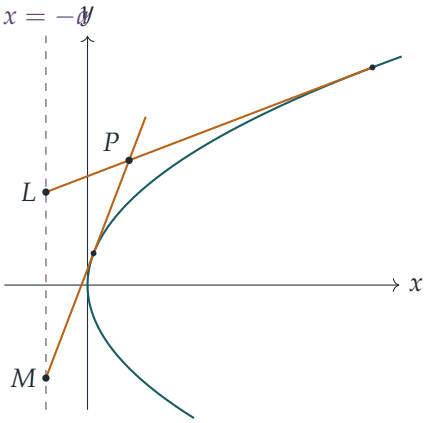
軌跡

拋物線上每一點都可寫成 $(at^2, 2at)$，而且對應的 t 是唯一的，所以每條切線都是直線 $ty = x + at^2$ 的其中一條。設給定的點為 $P = (h, k)$。參數為 t 的切線通過 P，當且僅當

$$at^2 - kt + h = 0.$$

要有兩條切線，就需要兩個相異實根 t_1, t_2，即 $k^2 > 4ah$（P 位於拋物線之外）。這時

$$t_1 + t_2 = \frac{k}{a}, \qquad t_1 t_2 = \frac{h}{a}.$$



參數為 t 的切線與準線（directrix）$x = -a$ 相交於滿足 $ty = -a + at^2$ 之處。只要 $t \neq 0$，便有

$$y = a\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

（若 $t = 0$，切線是 $x = 0$，與準線平行，沒有交點。這種情況只會在 $h = t_1 t_2 a = 0$ 時出現，所以要 L 和 M 存在，必須有 $h \neq 0$，這時 $t_1, t_2 \neq 0$。）因此 L 和 M 分別是 $(-a,\, a(t_1 - \frac{1}{t_1}))$ 和 $(-a,\, a(t_2 - \frac{1}{t_2}))$，而由於兩點位於同一條鉛垂線上，

$$\begin{aligned} LM &= \left|a(t_1 - t_2) - a\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)\right| = \left|a(t_1 - t_2) + a\,\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}\right| \\ &= |a|\,|t_1 - t_2|\left|\frac{t_1 t_2 + 1}{t_1 t_2}\right|. \end{aligned}$$

想一想 怎樣不解二次方程而求得 $t_1 - t_2$？

它的平方是兩根的對稱式：

$$(t_1 - t_2)^2 = (t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 = \frac{k^2}{a^2} - \frac{4h}{a} = \frac{k^2 - 4ah}{a^2}.$$

另外

$$\frac{t_1t_2+1}{t_1t_2} = \frac{h/a+1}{h/a} = \frac{h+a}{h}.$$

把 LM 的表達式平方再代入，

$$LM^2 = a^2 \cdot \frac{k^2-4ah}{a^2} \cdot \frac{(h+a)^2}{h^2} = \frac{(h+a)^2(k^2-4ah)}{h^2}.$$

若 $LM = \ell$，兩邊同乘 h^2 得

$$(h+a)^2(k^2-4ah) = \ell^2h^2,$$

所以 $P=(h,k)$ 位於 $(x+a)^2(y^2-4ax) = \ell^2x^2$ 上，這正是所要證明的。

驗算

- 取 $a=1$ 及 $P=(1,3)$，如圖所示。參數滿足 $t^2-3t+1=0$，所以 $t = \frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$，而 $t-\frac{1}{t} = \pm\sqrt{5}$（因為 $t_1t_2=1$，故 $1/t_1=t_2$）。因此 $LM=2\sqrt{5}$，$LM^2=20$，而公式給出 $(1+1)^2(9-4)/1^2=20$。
- 準線上的點，即 $h=-a$：公式給出 $LM=0$。事實上，從這樣的點所作的切線，與準線的交點就是該點本身，所以 $L=M$。
- 我們用另一方法獨立地求出切線（直線 $y=k+m(x-h)$，其中 $hm^2-km+a=0$），對超過 14,000 組隨機的 a、h、k 作測試，計算所得的 LM^2 每次都與 $(h+a)^2(k^2-4ah)/h^2$ 吻合。例如 $a=1$、$P=(2,5)$ 時，兩種方法都得出 $LM^2=38.25$。

常見錯誤

- 把切線的參數方程用反了：P 固定而 t 未知，得出的是二次方程 $at^2-kt+h=0$，而不是關於 h 和 k 的方程。
- 寫成 $\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2} = \frac{t_1-t_2}{t_1t_2}$；正確的是 $\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}$，正是這個正負號令兩項相加而非互相抵銷。

STEP 之外

從一點向圓錐曲線（conic）所作的切線，以及連接兩個切點的直線（即該點的極線（polar)），是射影幾何（projective geometry）的起點。在射影幾何中，極點（pole）、極線與準線都可納入同一幅圖像：準線就是焦點（focus）的極線。像本題這樣透過根的對稱函數（symmetric functions）來處理各根，也是邁向方程論（theory of equations）和伽羅瓦理論（Galois theory）的第一步。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 收錄了更多這類風格的坐標幾何題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。