詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 3 題

純數學 • 複數的三角不等式

> **STEP III 樣本試卷，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q3

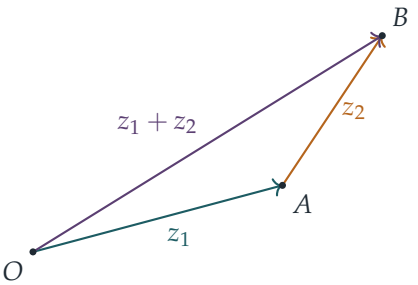
關鍵思路

題中的不等式就是三角不等式（triangle inequality）：三角形任何一邊的長度都不會超過另外兩邊之和。反覆應用這個不等式，便可以用各項模（modulus）之和來界定整個和的模。如果當 $|z| \leq \frac{1}{3}$ 時，方程左方的模總是嚴格小於 1，那麼它就永遠不可能等於 1；而這個上界只需用一個等比級數（geometric series）便可求得。

解答

幾何意義

在阿根圖（Argand diagram）中，把 z_1 看成由原點 O 到點 A 的位移，把 z_2 看成由 A 到點 B 的位移。那麼 $z_1 + z_2$ 就是由 O 直接到 B 的位移。



三角形 OAB 三邊的長度分別是 $|z_1|$、$|z_2|$ 和 $|z_1 + z_2|$。這個不等式說的是：由 O 直接走到 B，路程絕不會比途經 A 更長，也就是三角形的一邊至多等於另外兩邊之和。等號成立，當且僅當三角形退化成一條線段，而 A 位於線段 OB 上，即 z_1 與 z_2 指向同一方向

（其中一個是另一個的非負實數倍，或者其中一個是零）。

利用歸納法（induction），同樣的結論對任意有限多項都成立：

$$|w_1 + w_2 + \cdots + w_n| \le |w_1| + |w_2| + \cdots + |w_n|,$$

因為 $|w_1 + \cdots + w_{k+1}| \le |w_1 + \cdots + w_k| + |w_{k+1}|$。從幾何上看，由 n 段直線組成的路徑，其長度至少等於由起點到終點的直線距離。

在 $|z| \le \frac{1}{3}$ 內沒有解

假設 $|z| \le \frac{1}{3}$，並且對每個 i 都有 $|a_i| \le 2$。先用推廣後的三角不等式，再用 $|ab| = |a||b|$，得

$$\begin{aligned}\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| &\le |a_1||z| + |a_2||z|^2 + \cdots + |a_n||z|^n \\ &\le 2\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3^2} + \cdots + \tfrac{1}{3^n}\right),\end{aligned}$$

其中第二步用到 $|a_i| \le 2$，以及對每個 k 都有 $|z|^k \le \left(\frac{1}{3}\right)^k$（所涉及的量全部非負，所以可以逐項估計上界）。

括號內是一個有限等比級數，首項為 $\frac{1}{3}$，公比為 $\frac{1}{3}$：

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}\left(1 - 3^{-n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3^n} < 1.$$

想一想 上面每一步都只用了 $\le$，為甚麼最後的不等式卻是嚴格的？

嚴格性來自級數，而不是來自三角不等式。由於求和到第 n 項便停止，它與無窮級數的總和 1 相比，恰好少了 $3^{-n} > 0$。所以無論 a_i 取甚麼值，也無論 z 是哪一個滿足 $|z| \le \frac{1}{3}$ 的數，都有

$$\left|a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n\right| \le 1 - 3^{-n} < 1.$$

但假如 z 是一個解，左方就會等於 $|1| = 1$。這是矛盾的，所以方程在 $|z| \le \frac{1}{3}$ 內沒有解，這正是所要證明的。

驗算

- 最壞的情況是 $a_1 = \cdots = a_n = 2$ 且 $z = \frac{1}{3}$，這時每個不等式都變成等式，左方等於 $1 - 3^{-n}$。當 $n = 10$ 時，這個值是 $0.99998\ldots$，僅僅略小於 1。
- 常數 $\frac{1}{3}$ 不能再改進。當每個 $a_i = 2$ 時，實函數 $2(x + x^2 + \cdots + x^n) - 1$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 處取負值，而當 n 很大時，它在稍稍超過 $\frac{1}{3}$ 的地方取正值，所以存在與 $\frac{1}{3}$ 要多接近有多接近的實根。

- 以數值方法測試了 200 000 組隨機選取的 $n \leq 30$、滿足 $|a_i| \leq 2$ 的 a_i 以及滿足 $|z| \leq \frac{1}{3}$ 的 z，左方的模從未達到 1 或以上。

常見錯誤

- 用無窮級數來估計上界，只得到 ≤ 1，這並不能排除等號成立的可能。你需要的是嚴格不等式，而它正是來自級數只有有限項這一點。
- 寫下 $|a_1 z + \cdots + a_n z^n| \leq |a_1 z| + \cdots$ 卻沒有說明理由：這是推廣到 n 項的三角不等式，題目設置第一部分正是為此。

STEP 之外

這是**無根區域**（root-free region）最簡單的例子：只要多項式的係數有界，它的根就會被排除在某個圓盤之外。把同樣的估計反過來用，便得到柯西（Cauchy）界：$z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0$ 的每個根的模都小於 $1 + \max |c_k|$；而在複分析（complex analysis）中，儒歇定理（Rouché's theorem）更把這類論證化為圓內根的個數的精確計算。想看一個極富幾何味道的講述，可以讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。