詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 2 題

純數學 • 二項式不等式與極限

> **STEP III 樣本試卷，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q2

關鍵思路

設 $y = 1 + x$，其中 $x > 0$，則 y 的冪可寫成二項式展開（binomial expansion），而展開式中每一項都是非負的。因此，我們可以捨去其餘各項，只保留一項，所得的仍然是一個下界（lower bound）。保留含 x 的一項，得到的下界增長速度與 n 相若，足以超越任何固定的 K；若要在除以 n 之後仍能超越 K，便需要一個增長速度與 n^2 相若的下界，所以我們改為保留含 x^2 的一項。

解答

不等式

設 $x \geq 0$，並設 n 為正整數。根據二項式定理（binomial theorem），

$$(1+x)^n = 1 + nx + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + x^n.$$

由於 $x \geq 0$，首兩項之後的每一項都是非負的，所以

$$(1+x)^n \geq 1 + nx > nx.$$

最後一個不等式（inequality）是嚴格的，原因在於那個 1；正因如此，即使 $x = 0$，結果依然成立（此時不等式變成 $1 > 0$）。

推導 y^n 最終會超過 K

設 $y > 1$，並取 $x = y - 1$，於是 $x > 0$。由第一部分可知，對每個正整數 n，

$$y^n = (1+x)^n > n(y-1).$$

若 $K \leq 0$，則毋須再做甚麼：對每個 n 都有 $y^n > 0 \geq K$，所以取 $N = 1$ 即可。若 $K > 0$，則選取一個整數 N，使得

$$N > \frac{K}{y-1},$$

這是辦得到的，因為 $y - 1 > 0$，所以右邊是一個固定的數。於是對每個整數 $n \geq N$，

$$y^n > n(y-1) \geq N(y-1) > K,$$

其中中間一步用到了 $y - 1 > 0$。這正是我們所需要的結果。注意同一個 N 對所有 $n \geq N$ 都適用，而不僅是對 $n = N$ 適用，因為下界 $n(y-1)$ 隨 n 遞增。

證明 y^n/n 最終會超過 K

由下界 $y^n > n(y-1)$ 只能得出 $y^n/n > y - 1$，而這是一個固定的數，對付不了很大的 K。我們需要為 y^n 找一個增長得比 n 更快的下界。

想一想 這一次，我們應該保留二項式展開中的哪一項？

保留含 x^2 的一項。由於 $x = y - 1 > 0$，展開式中所有項都是正的，所以對每個正整數 n，

$$y^n = (1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 > \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

（當 $n = 1$ 時，展開式中並沒有含 x^2 的項，但最後一個不等式仍然成立，因為其右邊等於 0。）兩邊除以 $n > 0$，得

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2}.$$

現在右邊會隨 n 增大而無止境地增長，這正是我們所需要的。若 $K \leq 0$，則取 $N = 1$ 即可，因為 $y^n/n > 0$。若 $K > 0$，則選取一個整數 N，使得

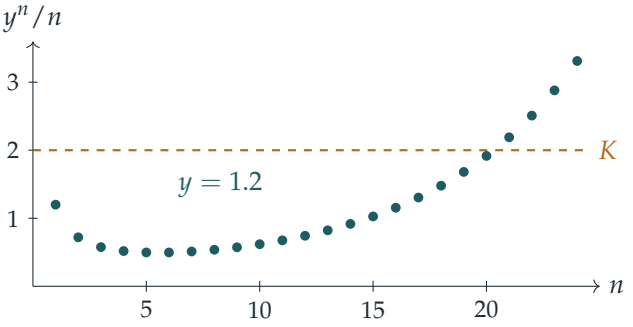
$$N > 1 + \frac{2K}{(y-1)^2}.$$

於是對每個整數 $n \geq N$，我們有 $n - 1 \geq N - 1 > 2K/(y-1)^2$，因此

$$\frac{y^n}{n} > \frac{(n-1)(y-1)^2}{2} > \frac{2K}{(y-1)^2} \cdot \frac{(y-1)^2}{2} = K,$$

這就是所要求的結果。

這個下界同樣隨 n 遞增，所以論證對每個 $n \geq N$ 都成立。這一點在這裏十分重要：y^n/n 本身並非總是遞增的。當 y 接近 1 時，它起初會下降（例如，只要 $y < 2$，便有 $y^2/2 < y$），正如 $y = 1.2$ 的略圖所示。因此，我們不能只找出一個滿足 $y^n/n > K$ 的 n，然後聲稱其後各項都會更大。



驗算

試取 $y = 1.01$ 和 $K = 1000$。按照我們的方法，對於 $y^n > K$ 得出 $N = 100\,001$，對於 $y^n/n > K$ 得出 $N = 20\,000\,002$。直接計算可知，其實對每個 $n \geq 1424$，$1.01^n/n > 1000$ 已經成立。我們的 N 遠非最小的可能值，但題目只要求找出某一個 N。我們還以有理數（rational）x 作精確計算，對數千組隨機的 x 和 n 檢驗了兩個不等式，並對數千組隨機的 $y > 1$ 和 K 檢驗了所選的 N（以及許多更大的 n）。

常見錯誤

- 只證明了對某一個 N 有 $y^N > K$，卻沒有解釋為何對每個 $n \geq N$ 都有 $y^n > K$。
- 在最後一部分使用 $y^n > n(y-1)$：除以 n 之後只剩下一個常數，無法超越任意的 K。
- 忘記了 K 可以是負數或零；在這種情況下，$K/(y-1)$ 本身並不是一個合理的下界（不過此時任何 N 都適用）。

STEP 之外

這是大多數學生遇到的第一個嚴格的「ε–N」式論證：它證明了當 $y > 1$ 時，$y^n \to \infty$ 且 $y^n/n \to \infty$。運用同樣的技巧，保留含 x^{k+1} 的一項，便可證明對任何固定的 k 都有 $y^n/n^k \to \infty$，所以指數函數（exponential）的增長勝過任何多項式（polynomial）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 正是由這類推理出發，建立起數列（sequence）與極限（limit）的理論。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。