詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 15 題

概率與統計 • 隨機網絡的連通性

STEP III 樣本試卷，第 15 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q15

關鍵思路

先把幾何拋開：唯一要緊的，是六條路之中哪幾條仍然開通。任何一條村都能從其餘各村到達，當且僅當開通的道路在四條村之間構成一個連通（connected）的網絡。因此，我們把所有可能的開通道路集合按所含道路的數目分類，數出每種大小之中有多少個是連通的，再各自乘上相應的概率。由於只有四條村，這個點算過程既短又乾淨。

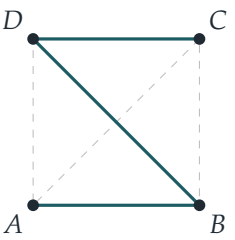
解答

設 $q = 1 - p$ 為某一條路開通的概率。設 K 為下雪之後每條村都能從其餘各村到達這一事件。

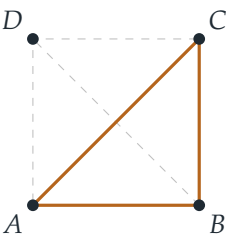
由於六條路互相獨立（independent），任何一個指定的 k 條開通道路的集合（其餘 $6 - k$ 條封閉）出現的概率都是 $q^k p^{6-k}$。所以

$$\mathrm{P}(K) = \sum_{k=0}^{6} N_k \, q^k p^{6-k},$$

其中 N_k 是能把四條村全部連通的 k 條道路集合的數目。



三條路：連通各村的樹



三條路：三角形，D 被隔絕

點算連通的道路集合

最多兩條路開通。每條開通的路連接兩條村，所以從某一條村出發，每條路最多只能帶來一條新的村。要到達其餘三條村，至少需要三條路。因此 $N_0 = N_1 = N_2 = 0$。

三條路開通。三條路的集合共有 $\binom{6}{3} = 20$ 個。假設某個這樣的集合未能連通各村。若有某條村被隔絕，則三條路全部落在其餘三條村之間。但連接那三條村的路只有三條，所以這個集合恰好是一個三角形。若沒有任何村被隔絕，則四條村分成兩對，而最多只有兩條路（每對之內各一條）可以開通，矛盾。所以失敗的情況只有 4 個三角形，每個對應一條被隔絕的村，於是

$$N_3 = 20 - 4 = 16.$$

? **想一想** 為甚麼有四條路開通時，網絡絕不可能不連通？

四條或以上的路開通。沿用上面兩種失敗的方式。若有一條村被隔絕，所有開通的路都必須落在其餘三條村之間，而那裏只有三條路。若分成兩對，則最多只容許兩條路開通。有四條或以上的路開通時，兩種情況都不可能發生，所以每個這樣的集合都是連通的：

$$N_4 = \binom{6}{4} = 15, \qquad N_5 = \binom{6}{5} = 6, \qquad N_6 = 1.$$

所求概率

把各個數目合起來，

$$\mathrm{P}(K) = q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 16q^3p^3, \qquad q = 1 - p.$$

按 p 的冪展開，得到等價的形式

$$\mathrm{P}(K) = 1 - 4p^3 - 3p^4 + 12p^5 - 6p^6.$$

$p = \frac{1}{2}$ 的情況

此時 $p = q = \frac{1}{2}$，所以道路開通與封閉的 $2^6 = 64$ 種組合全部等可能，每種的概率為 $\frac{1}{64}$。因此

$$\mathrm{P}(K) = \frac{1 + 6 + 15 + 16}{64} = \frac{38}{64} = \frac{19}{32},$$

正是所求。

驗算

- 極端值。當 $p = 0$ 時，每條路都開通，公式給出 1。當 $p = 1$ 時，每條路都封閉，公式給出 $1 - 4 - 3 + 12 - 6 = 0$。

- 補事件（*complement*）。網絡不連通，當且僅當有某條村被隔絕，或者四條村分成兩對而兩對之間沒有任何路相通。一條村被隔絕的概率是 p^3。對四條村運用容斥原理（inclusion–exclusion）（兩條指定的村同時被隔絕需要五條路封閉，而三條村被隔絕即表示四條村全部被隔絕），得出 $4p^3 - 6p^5 + 3p^6$。分成兩對的方法有 3 種，每種在兩條對內的路都開通的情況下，再加上 p^4q^2。以一減去總和，結果與上面的公式吻合：當 $p = \frac{1}{2}$ 時，不連通的概率是 $\frac{32-12+3+3}{64} = \frac{13}{32}$。
- 窮舉法（*brute force*）。用電腦列出全部 64 個道路集合，證實了 $16, 15, 6, 1$ 這幾個數目。以 $p = 0.3$ 進行模擬，得出 0.893，而準確值是 0.8925。

常見錯誤

- 把全部 20 個三條路的集合都當作連通，忘記了那四個三角形。
- 以為任何四條路的集合仍有可能令某條村孤立。一條村只有在它的三條路全部封閉時才會被隔絕。
- 寫 $q^k p^{6-k}$ 時，把 p（封閉）和 $1 - p$（開通）混淆。

STEP 之外

這是隨機圖（random graph）的一個微型例子：網絡的每條邊各自獨立地保留下來，然後我們問所得的結果是否連通。這個 p 的多項式稱為該網絡的可靠度多項式（reliability polynomial），而 16 這個數則是凱萊公式（Cayley's formula）的一個實例：連接 n 個有標號的點的樹（tree）共有 n^{n-2} 棵。對於大型網絡，艾狄胥（Erdős）和倫伊（Rényi）發現，當道路開通的概率越過某個臨界值（threshold）時，連通性會異常突然地出現。若想進一步了解由獨立事件構成的隨機結構，可參閱 Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。