詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 14 題

力學 • 轉動碰撞

> **STEP III 樣本試卷，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q14

關鍵思路

樞軸(pivot)對棒施加一個未知的衝量(impulse)，所以線動量(linear momentum)並不守恆；但這個衝量對樞軸沒有力矩(moment)，因此對中點的角動量(angular momentum)守恆。再在接觸點應用牛頓恢復定律（Newton's law of restitution）（由於碰撞是完全彈性（perfectly elastic）的，恢復係數為 1），一切便確定下來。至於第二部分，先找出質點接下來怎樣運動，然後追蹤兩個物體：棒的另一半會轉過來，到達質點的運動直線。

解答

模型。質點視為點質量；桌面光滑，所以兩個物體都不受摩擦力；棒是均勻的，並在其中點 O 處光滑地樞接。棒對 O 的轉動慣量（moment of inertia）為

$$I = \tfrac{1}{12}m(4a)^2 = \tfrac{4}{3}ma^2.$$

碰撞期間，衝量沿質點的運動直線作用（棒是光滑的，而質點垂直撞向棒），所以質點繼續沿同一直線運動。設碰撞後質點的速度為 v，以其原來的運動方向為正。

角速率

對 O 的角動量。系統（質點和棒）所受的唯一外來衝量來自 O 處的樞軸，而它對 O 的力矩為零。碰撞前，質點對 O 的角動量為 mua，而棒靜止，所以

$$mua = mva + \tfrac{4}{3}ma^2\omega \qquad \Longrightarrow \qquad u = v + \tfrac{4}{3}a\omega. \tag{1}$$

恢復定律。棒上被撞擊的一點與 O 相距 a，所以剛碰撞後，它以速率 $a\omega$ 沿質點原來的

方向運動。恢復係數（coefficient of restitution）為 1，故分離速率等於接近速率：

$$a\omega - v = u. \tag{2}$$

想一想 牛頓恢復定律可以用於轉動中的物體嗎？

可以：它適用於兩個接觸點沿公法線方向的速度。如果你喜歡，也可以改用能量：「完全彈性」表示動能（kinetic energy）守恆，$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ma^2\omega^2$。把它寫成 $m(u-v)(u+v) = \frac{4}{3}ma^2\omega^2$，並利用 (1)，即 $u - v = \frac{4}{3}a\omega$，便得 $u + v = a\omega$（兩邊除以 $\omega \neq 0$），這正是 (2)。

把 (1) 和 (2) 相加，消去 v：

$$2u = \tfrac{7}{3}a\omega \qquad \Longrightarrow \qquad a\omega = \frac{6u}{7},$$

這就是所要求的結果。然後由 (2)，

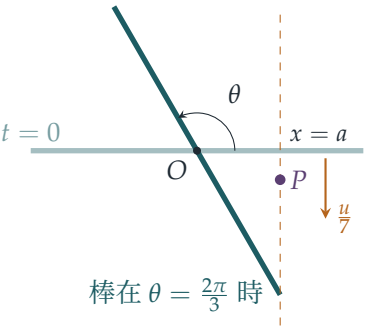
$$v = a\omega - u = -\frac{u}{7},$$

所以質點沿原來的直線以速率 $u/7$ 反彈。

第二次碰撞

在桌面上取坐標軸，以 O 為原點，x 軸沿棒的初始位置，而質點原本沿直線 $x = a$ 向正 y 方向運動，於是它在時間 $t = 0$ 時在 $(a, 0)$ 撞擊棒。那麼當 $t > 0$ 時：

- 質點位於 $\left(a,\ -\frac{u}{7}t\right)$，向負 y 方向勻速運動；
- 被撞擊的一點向正 y 方向運動，所以棒逆時針轉動，在時間 t 時它與 x 軸成角 $\theta = \omega t$。在兩者再次碰撞之前，沒有其他力作用於任何一個物體，所以兩者的運動都是勻速的。



棒的半長為 $2a$，所以只有當棒所在直線上落在直線 $x = a$ 的那一點（它與 O 相距 $a/|\cos\theta|$）距離 O 不超過 $2a$ 時，棒才會到達該直線；也就是說，當 $|\cos\theta| \geq \frac{1}{2}$ 時。在這種情況下，棒在高度 $y = a\tan\theta$ 處與該直線相交。

- 當 $0 < \theta \le \frac{\pi}{3}$ 時，棒與該直線相交於 $y = a\tan\theta > 0$，在 x 軸上方，而質點在其下方：沒有接觸。
- 當 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ 時，棒根本到不了該直線。
- 當 $\frac{2\pi}{3} \le \theta < \pi$ 時，棒的另一半與該直線相交於 $y = a\tan\theta < 0$，與質點在同一側。

現在比較位置。由於 $t = \theta/\omega = \frac{7a\theta}{6u}$，在角度為 θ 時質點的 y 坐標為 $-\frac{u}{7}t = -\frac{a\theta}{6}$。考慮

$$f(\theta) = (\text{棒的}y\text{ 坐標，取於直線}x = a) - (\text{質點的}y) = a\tan\theta + \frac{a\theta}{6}, \qquad \frac{2\pi}{3} \le \theta < \pi.$$

- 在 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 時（棒的末端到達該直線）：$f = a\left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{9}\right) < 0$，因為 $\frac{\pi}{9} < 1 < \sqrt{3}$。質點位於 $y = -\frac{\pi}{9}a \approx -0.35a$，介乎 x 軸與位於 $y = -\sqrt{3}a$ 的棒末端之間：棒的末端已經轉到質點之外。
- 當 $\theta \to \pi^-$ 時：$\tan\theta \to 0$，所以 $f \to \frac{\pi}{6}a > 0$。棒正向上掃回 x 軸，而質點大約位於 $-0.52a$。

f 在 $[\frac{2\pi}{3}, \pi)$ 上連續，所以根據介值定理（intermediate value theorem），在兩者之間存在某個 θ 使得 $f(\theta) = 0$：在那一刻棒正處於質點的位置，兩者再次碰撞。（由上面頭兩點可知，之前不可能有接觸。）證明至此完成。

以數值計算，碰撞發生在 $\tan\theta = -\theta/6$ 之處，即 $\theta \approx 2.716$（約 155.6°），時間為 $t \approx 3.17\,a/u$，此時質點位於 $y \approx -0.45a$，沿棒量度距離 O 約 $1.10a$。

驗算

- 能量：以 $a\omega = \frac{6}{7}u$ 和 $v = -\frac{1}{7}u$ 代入，最終動能為 $\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{49} + \frac{4}{3}\cdot\frac{36}{49}\right)u^2 = \frac{1}{2}m\cdot\frac{49}{49}u^2$，恰好等於初始能量。
- 對一個轉動慣量為 I 的物體，在距離 d 處撞擊，重複以上論證可得 $d\omega = 2u/(1 + I/md^2)$。當 $I \to 0$ 時，被撞擊的一點以 $2u$ 離開，正如與一個極輕的物體作彈性碰撞；當 $I \to \infty$ 時，棒幾乎不轉動，質點以速率 u 反彈。這裏 $I/ma^2 = \frac{4}{3}$，得出 $\frac{6}{7}u$。
- 我們以精確分數驗證了 $a\omega = \frac{6}{7}u$、$v = -\frac{1}{7}u$ 同時令角動量和能量守恆，然後把兩個運動按時間逐步推進：碰撞後的首次接觸發生在 $\theta \approx 2.7165$，與用二分法（bisection）解 $\tan\theta + \theta/6 = 0$ 所得的結果吻合。

常見錯誤

- 以為線動量守恆。樞軸會提供衝量，所以只有對樞軸的角動量守恆。
- 使用 $I = \frac{1}{3}m\ell^2$（這是對端點的值），或者忘記棒的長度是 $4a$ 而不是 $2a$。

► 在棒被撞擊的那一半上尋找第二次碰撞。那一半會遠離質點的運動直線；與質點相遇的是轉過來的另一半。

STEP 之外

把對某固定點的角動量與能量條件或恢復條件配合使用，是處理剛體（rigid body）衝擊運動的標準方法，並由此引出撞擊中心（centre of percussion）的概念：即撞擊一個樞接物體時，樞軸處不會產生衝量的那一點。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）仔細講解了剛體碰撞和角動量，並收錄了許多正是這一類型的習題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。