詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 13 題

力學 • 滾動圓環

STEP III 樣本試卷，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

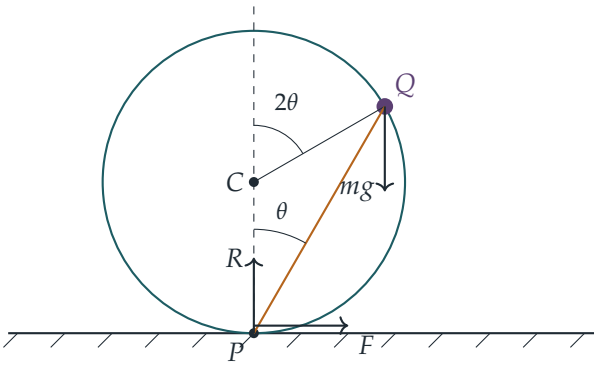
step.maths.org/questions/spec-s3-q13

關鍵思路

由於圓環是輕的，系統中唯一的動能就是質點的動能；又由於圓環作滾動，摩擦力不作功。因此能量守恆（energy conservation）可立即給出速率。滾動亦完全確定了幾何關係：圓環轉過 2θ 之後，其中心已移動了距離 $2a\theta$，由此可把 x 和 y 單用 θ 表示。最後，輕圓環不能承受任何淨力，所以桌面的反作用力恰好就是質點的加速度所要求的力，而且它不能是負數。

解答

把圓環模型化為一個只滾不滑的輕剛性圓，把質點視為固定在環邊上的點質量。設 P 為圓環與桌面的接觸點，C 為圓心，Q 為質點。取圓環沿正 x 方向滾動，使 θ 由 0 開始增加。



這裏 R 和 F 分別是桌面在 P 點作用於圓環的法向反作用力（normal reaction）和摩擦力

（friction），而弦 PQ 與鉛垂線的夾角為 θ（即圓心角 2θ 的一半）。

速率

R 和 F 都作用於 P 點，而由於圓環作滾動，該點在瞬間是靜止的，所以兩者都不作功。圓環是輕的，所以唯一的動能是質點的動能，唯一的勢能變化也是質點的勢能變化。質點由高度 $2a$ 出發，起初幾乎靜止；當半徑 CQ 與向上的鉛垂線成角 2θ 時，它的高度為 $a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta$。由能量守恆得

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mg\big(2a - 2a\cos^2\theta\big) = 2mga\sin^2\theta,$$

所以 $v^2 = 4ga\sin^2\theta$，而由於 $0 \le \theta < \tfrac{\pi}{2}$ 給出 $\sin\theta \ge 0$，

$$v = 2(ga)^{1/2}\sin\theta,$$

這正是所求。

位置與 $\dot\theta$

圓環已轉過角 2θ，而只滾不滑意味着圓心向前移動的距離等於弧長 $a\cdot 2\theta$。相對於 C，質點在前方 $a\sin 2\theta$、上方 $a\cos 2\theta$ 處。所以

$$x = 2a\theta + a\sin 2\theta, \qquad y = a + a\cos 2\theta = 2a\cos^2\theta.$$

對時間求導，

$$\dot x = 2a\dot\theta\,(1 + \cos 2\theta) = 4a\dot\theta\cos^2\theta,$$
$$\dot y = -2a\dot\theta\sin 2\theta = -4a\dot\theta\sin\theta\cos\theta,$$

因此

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big) = 16a^2\dot\theta^2\cos^2\theta.$$

? **想一想** 有沒有更快的方法看出 $v = 4a\dot\theta\cos\theta$？

有：P 是瞬時轉動中心（instantaneous centre of rotation），而圓環以角速率 $2\dot\theta$ 轉動。弦 PQ 在 C 所對的角為 $\pi - 2\theta$，所以 $PQ = 2a\cos\theta$，於是 $v = PQ\cdot 2\dot\theta = 4a\dot\theta\cos\theta$，與上面的計算吻合。

由於 $\dot\theta > 0$ 且 $\cos\theta > 0$，與由能量求得的速率比較，

$$4a\dot\theta\cos\theta = 2(ga)^{1/2}\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \dot\theta = \tfrac{1}{2}(g/a)^{1/2}\tan\theta,$$

這就是要求的第一個結果。（左邊必須是變率 $\dot\theta$，而不是 θ：右邊的單位是 s^{-1}。）

鉛垂加速度

把 $\dot\theta$ 代入 $\dot y$，

$$\dot y = -4a\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac12(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2(ga)^{1/2}\sin^2\theta.$$

再求導一次，並再次使用 $\dot\theta$，

$$\ddot y = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta = -4(ga)^{1/2}\sin\theta\cos\theta\cdot\tfrac12(g/a)^{1/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -2g\sin^2\theta,$$

這正是所求。同樣地，$\dot x = 4a\cos^2\theta\,\dot\theta = (ga)^{1/2}\sin 2\theta$，而

$$\ddot x = 2(ga)^{1/2}\cos 2\theta\,\dot\theta = g\cos 2\theta\tan\theta.$$

甚麼令滾動停止

圓環是輕的，所以作用於「圓環連質點」這個系統的合力等於 m 乘以質點的加速度。外力有向下的 mg、向上的 R 和水平方向的 F。沿鉛垂方向分解，

$$R - mg = m\ddot y \quad\Longrightarrow\quad R = mg\big(1-2\sin^2\theta\big) = mg\cos 2\theta,$$

而沿水平方向則有 $F = m\ddot x = mg\cos 2\theta\tan\theta$，所以當 $R>0$ 時 $F/R = \tan\theta$。

> ? **想一想** 當 θ 超過 $\pi/4$ 時，會出甚麼問題？

桌面只能推而不能拉，所以 $R\ge 0$。但 $R = mg\cos 2\theta$ 在 $\theta=\pi/4$ 時降至零，此時質點與圓心同高，而要繼續滾動下去就需要 $R<0$。換一個說法，繼續滾動需要 $\ddot y = -2g\sin^2\theta < -g$：質點向下的加速度要比自由下落還要大，單靠重力是做不到的。所以在 $\theta=\pi/4$ 時接觸力消失，圓環離開桌面。此後質點作拋體運動（projectile motion），初速度的分量為向前 $(ga)^{1/2}$ 和向下 $(ga)^{1/2}$，而輕圓環只是被它帶着走，其最低點升離桌面。

摩擦力可能更早介入。滾動需要 $|F|\le\mu R$，即 $\tan\theta\le\mu$，而當 $\theta\to\pi/4$ 時 $\tan\theta$ 遞增至 1。所以若摩擦系數（coefficient of friction）滿足 $\mu<1$，圓環在 $\tan\theta=\mu$ 時便開始滑動，未及到達 $\theta=\pi/4$。只有當 $\mu\ge 1$ 時，它才會一直滾到 $\theta=\pi/4$，然後跳起。

驗算

- 當 $\theta=0$ 時，$\dot\theta=0$：最高位置是一個平衡位置，這就是為甚麼圓環必須被輕微移離該位置。
- 當 $\theta=\pi/4$ 時：$v=(2ga)^{1/2}$，這是下落距離 a 所得的速率，而質點確實由 $2a$ 降到了 a。

- 電腦獨立地對 $\phi = 2\theta$ 的運動方程作數值積分（由拉格朗日量（Lagrangian）$ma^2(1+\cos\phi)\dot{\phi}^2 - mga(1+\cos\phi)$ 出發），並把有限差分求得的速度和加速度與公式比較。速率、$\dot{\theta}$、$\ddot{y}$、$R = mg\cos 2\theta$ 和 $F/R = \tan\theta$ 全部吻合，誤差在 10^{-6} 以內；例如在 $\theta = \pi/4$ 時，它給出 $R = 0$ 和 $F/R = 1$。

常見錯誤

- 以為圓心移動的距離是 $a\theta$ 而不是 $2a\theta$：圓環轉過的角是 2θ，不是 θ。
- 把摩擦力計入能量方程。接觸點是靜止的，所以圓環滾動時摩擦力不作功。
- 只說質點「掉下來」。質點是固定在環上的；離開桌面的是圓環，因為反作用力否則就要變成負數。

STEP 之外

滾動物體的接觸點就是它的瞬時轉動中心，而只滾不滑是一個約束（constraint），它消去一個自由度（degree of freedom）而不作功。這類約束可由拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）有系統地處理：只需用單一坐標（例如 θ）寫出能量，運動方程便自動得出；上面的驗算正是這樣做的。約束力何時消失的問題（珠子離開球面、汽車離開路拱）是大學一年級動力學的典型題目。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對滾動運動和約束力有詳細的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。