詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 12 題

力學 • 桿的平衡

STEP III 樣本試卷，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

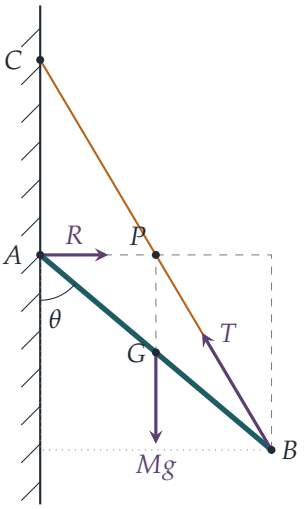
step.maths.org/questions/spec-s3-q12

關鍵思路

桿只受三個力作用：它的重量、光滑牆壁的反作用力（reaction），以及繩的張力（tension）。使物體保持平衡（equilibrium）的三個不平行的力必定通過同一點，而在這題中，這一點很容易找到。它完全確定了整個幾何結構，之後只需分解一次力，便可求得張力。

解答

模型。桿是均勻的，所以它的重量 Mg 作用於中點 G。牆壁是光滑的，所以在 A 的反作用力 R 是水平的（垂直於牆壁）。繩是輕而不可伸長的，所以它以張力 T 拉着 B，方向沿 BC。



桿的傾斜角度

反作用力 R 沿着通過 A 的水平線作用，而重量則沿着通過 G 的鉛垂線作用。這兩條線相交於點 P，它與 A 同高，並位於 G 的正上方（或正下方）。由於三個力處於平衡，它們對 P 的力矩（moment）必須互相抵銷；R 和 Mg 對 P 都沒有力矩，所以 T 也沒有，因此繩所在的直線必定通過 P。

想一想 桿從 A 出發，是向上還是向下？

從牆壁起量度水平距離。B 與牆壁的距離是 $L\sin\theta$，其中 θ 是桿與鉛垂線之間的夾角，而 G（因而 P 也一樣）與牆壁的距離是它的一半，即 $\frac{1}{2}L\sin\theta$。繩從 B 成一直線伸延至牆上的 C，所以水平方向上走了一半的點，也就是繩上走了一半的點：P 是 BC 的中點。因此 P 的高度是 B 和 C 兩點高度的平均值。但 P 與 A 同高，而 C 在 A 之上，所以 B 必定在 A 之下，而且低於它的距離恰好等於 AC。

所以桿是從 A 向下垂的。設 θ 為桿與向下鉛垂線的夾角。那麼 B 在 A 之下的深度是 $L\cos\theta$，於是 $AC = L\cos\theta$。相對於 B 來說，點 C 的水平距離是 $L\sin\theta$，高度則高出 $L\cos\theta + L\cos\theta = 2L\cos\theta$。由於繩長為 αL，由畢氏定理（Pythagoras' theorem）得

$$\alpha^2 L^2 = L^2\sin^2\theta + 4L^2\cos^2\theta = L^2\left(1 + 3\cos^2\theta\right),$$

所以

$$\cos^2\theta = \frac{\alpha^2 - 1}{3}, \qquad \text{即} \qquad \theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{3}},$$

而桿是從 A 向下伸出，與鉛垂線成這個角度。

α 的可能值

我們需要 C 嚴格地在 A 之上，所以 $\cos\theta > 0$。（若 $\cos\theta = 0$，則 C 與 A 重合，桿是水平的；這時 A、B、C 共線（collinear）。）我們亦需要 A、B、C 不共線，所以桿不是鉛垂的：$\sin\theta \neq 0$，即 $\cos^2\theta < 1$。因此

$$0 < \frac{\alpha^2 - 1}{3} < 1 \iff 1 < \alpha^2 < 4 \iff 1 < \alpha < 2,$$

當中用到 $\alpha > 0$。反過來說，對於這個範圍內的任何 α，上述角度都存在，而按這個構造所得的位形中，三個力共點（concurrent），所以力矩平衡，而下文分解力所得的 T 和 R 均為正數。可能值的集合是 $1 < \alpha < 2$。

張力

沿鉛垂方向分解力（resolve）。繩與鉛垂線所成角的餘弦是（鉛垂上升高度）/（長度）$= 2L\cos\theta/(\alpha L)$，而 R 是水平的，所以

$$T \cdot \frac{2\cos\theta}{\alpha} = Mg \quad\Longrightarrow\quad T = \frac{Mg\alpha}{2\cos\theta} = \frac{Mg\alpha}{2}\left(\frac{3}{\alpha^2-1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

這裏代入了 $\cos\theta = \sqrt{(\alpha^2-1)/3}$（取正根，因為 $\cos\theta > 0$）。這就是所要求的結果。

為完整起見，沿水平方向分解力可得 $R = T \cdot \dfrac{L\sin\theta}{\alpha L} = \frac{1}{2}Mg\tan\theta > 0$，所以牆壁確實把桿向外推，正如牆壁應有的表現。

驗算

- 當 $\alpha \to 2^-$ 時，$\cos\theta \to 1$：桿鉛垂地懸在 A 之下，繩沿着桿對摺回來，而 $T \to Mg$，因為這時繩承擔了全部重量。當 $\alpha \to 1^+$ 時，$\theta \to 90^\circ$ 且 $T \to \infty$：一根接近水平的桿需要極大的張力才能支撐得住。
- 取 $\alpha = 1.5$，我們得到 $\cos\theta \approx 0.6455$（$\theta \approx 49.8^\circ$）及 $T \approx 1.162\,Mg$。我們以數值方法驗證過：對於在 $(1,2)$ 內隨機選取的數千個 α，對 A 的力矩恰好只在一個角度為零，這個角度與公式吻合，張力亦然；而當 α 在 $(1,2)$ 之外時，並不存在平衡狀態。

常見錯誤

- 把桿畫成從 A 向上傾斜，就像梯子問題那樣。共點的論證迫使 B 在 A 之下，而圖畫錯了的話，方程便沒有相容的解。
- 忘記光滑牆壁的反作用力是水平的，因而引入了不必要的摩擦力或鉛垂分量。

- 把 $\alpha = 1$ 或 $\alpha = 2$ 包括在內：這兩個值給出共線（退化）的位形，而題目已把這種情況排除。

STEP 之外

三力原理是靜力學（statics）中一個一般事實的特殊情況：一個力系處於平衡，當且僅當它的合力以及它對任意一點的合力矩都等於零。像我們選取 P 那樣巧妙地選點，往往是最快捷的途徑。工程力學中對桁架、纜索和框架的分析，背後也是同一個想法。若想深入而全面地了解力與力矩，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。