詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 11 題

力學 • 一階微分方程

> **STEP III 樣本試卷，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q11

本題在 *Beyond STEP* 第 11.13 節鏟雪車問題中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/snowplough.html

關鍵思路

每部鏟雪車的速率都以積雪深度表示，而深度則取決於鏟雪車何時到達某一點。因此，很自然會把時間看成位置的函數，並寫出 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x$，即速率的倒數（reciprocal）。對第一部鏟雪車而言，深度就是原有深度加上其後落下的雪；對第二部而言，關鍵的觀察是：它前方的雪，只是從第一部鏟雪車清理該處之後才開始累積的。

解答

把每部鏟雪車看成沿路移動的一點，並由共同的起點量度距離。全文中，深度以米為單位，時間以秒為單位，距離以米為單位。

第 (i) 部分

在時間 t，第一部鏟雪車遇到的雪自 $t = 0$ 起一直不受干擾地落下，所以其深度為

$$z = h + kt.$$

因此速率為

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{\alpha(h+kt)}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha(h+kt)}{k} = \alpha t + \frac{\alpha h}{k}.$$

（這裏取倒數並無問題，因為速率為正，所以 x 是 t 的嚴格遞增函數（strictly increasing function）。）這個方程對 t 是線性的，最簡潔的寫法是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(t+\frac{h}{k}\Big)=\alpha\Big(t+\frac{h}{k}\Big).$$

由此得 $t+h/k=Ce^{\alpha x}$，其中 C 為常數。當 $x=0$ 時 $t=0$，所以 $C=h/k$，而行走 x 米所需的時間為

$$t_1(x)=\big(e^{\alpha x}-1\big)\frac{h}{k}\text{ 秒},$$

正如所求。

第 (ii) 部分

建立方程。 設在時間 $t>T$，第二部鏟雪車位於位置 y。第一部鏟雪車在第 (i) 部分所得的時間 $t_1(y)$ 經過這一點，並把該處的雪全部清除。

? **想一想** 第二部鏟雪車前方的積雪深度是多少？

不是 $h+kt$：第一部鏟雪車駛過後，留下的是光禿禿的路面。在位置 y，雪自時間 $t_1(y)$ 起由零開始以速率 k 累積，所以深度為

$$z=k\big(t-t_1(y)\big).$$

（這需要 $t>t_1(y)$，即第二部鏟雪車仍在第一部後面；在兩車相遇之前，這一點都成立。）因此第二部鏟雪車的速率為

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{\alpha k\big(t-t_1(y)\big)}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=t-\big(e^{\alpha y}-1\big)\frac{h}{k},$$

這正是題目給出的方程。第二部鏟雪車在時間 T 由原點出發，所以初始條件（initial condition）是：當 $y=0$ 時 $t=T$。

驗證解。 把題目提出的解寫成

$$t=t_1(y)+g(y),\qquad g(y)=\Big(T-\frac{\alpha h y}{k}\Big)e^{\alpha y}.$$

於是 $t-t_1(y)=g(y)$，所以我們需要 $\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{d}t/\mathrm{d}y=g(y)$。求導，並對 g 使用積法則（product rule），得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}&=\frac{\alpha h}{k}e^{\alpha y}\;-\;\frac{\alpha h}{k}e^{\alpha y}\;+\;\alpha\Big(T-\frac{\alpha h y}{k}\Big)e^{\alpha y}\\&=\alpha\,g(y),\end{aligned}$$

其中第一項是 $t_1'(y)$，其後兩項是 $g'(y)$。所以微分方程（differential equation）成立。此外，當 $y=0$ 時，$t=0+T\cdot 1=T$，所以初始條件亦成立。

為甚麼這就是所求的唯一解？這個方程是一階線性方程：若 t 和 $\tilde{t}$ 都滿足它，則兩者之差 u 滿足 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y = \alpha u$，所以 $u = u(0)\mathrm{e}^{\alpha y}$。兩者都滿足 $t(0) = T$，所以 $u(0) = 0$，從而 $u \equiv 0$。因此，通過 $(y,t) = (0,T)$ 的解恰好只有一個，而我們已經找到了它。

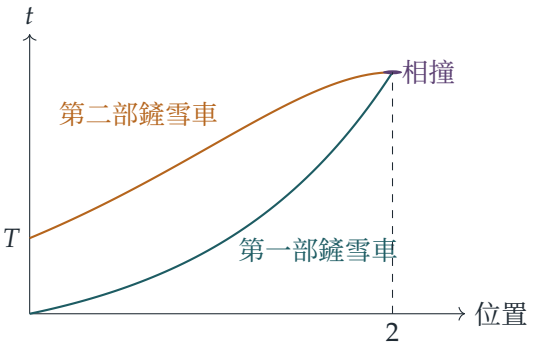
（如果你想直接把它推導出來：乘以積分因子（integrating factor）$\mathrm{e}^{-\alpha y}$ 可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(t\mathrm{e}^{-\alpha y}\right) = -\frac{\alpha h}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\alpha y}\right)$，再由 0 積分至 y，便會得到同一條公式。）

相撞。 若兩部鏟雪車在同一時間到達某一點 y，它們便會在該點相撞；也就是說 $t = t_1(y)$，即 $g(y) = 0$。由於 $\mathrm{e}^{\alpha y} > 0$，這種情況恰好在以下條件成立時出現：

$$T - \frac{\alpha h y}{k} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = \frac{kT}{\alpha h}.$$

當 $0 \le y < kT/(\alpha h)$ 時，我們有 $g(y) > 0$（取 $\alpha, h, k > 0$，因為速率必須為正），所以第二部鏟雪車到達每個這樣的點的時間都嚴格遲於第一部，兩車不會更早相遇。因此，兩部鏟雪車在行走了 $kT/(\alpha h)$ 米時相撞。 ■

下圖顯示當 $h = k = \alpha = 1$ 及 $T = 2$ 時，兩條路徑在 (y,t) 平面上的情況；兩條曲線之間的時間差 $g(y)$ 在 $y = 2$ 處縮減至零。



驗算

- 單位：α 的單位是 m^{-1}（因為 $k/(\alpha z)$ 是速率），所以 αx 是無量綱（dimensionless）的，h/k 是時間，而 $kT/(\alpha h)$ 是長度。
- 若 $T = 0$，兩部鏟雪車同時出發，公式給出在距離 0 處相撞；第一部鏟雪車領先的時間 T 越大，相撞的地點便沿路推得越遠，這與預期相符。
- 數值上，對多組隨機選取的 h、k、α 和 T 的值，把每部鏟雪車的運動逐步向前推算（對第二部而言，是由 $t = T$ 時 $y = 0$ 出發，按 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = 1/\big(\alpha(t - t_1(y))\big)$ 推算），所得結果與公式相符，誤差小於 10^{-8}。取 $h = k = \alpha = 1$ 及 $T = 2$，如圖中所示，兩部鏟雪車都在時間 $\mathrm{e}^2 - 1 \approx 6.39\,\mathrm{s}$ 到達 $y = 2$。

常見錯誤

- 對第二部鏟雪車也使用深度 $h + kt$。它所鏟的路面在時間 $t_1(y)$ 已被清理過，所以深度是 $k(t - t_1(y))$。
- 驗證解的時候忘記了初始條件：當 $y = 0$ 時 $t = T$；單單是微分方程的解並不足夠。
- 寫成 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 而不是 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}y$：以時間作為因變量（dependent variable），方程便會變成線性，容易處理。

STEP 之外

這屬於經典的「鏟雪車問題」（snowplough problem）一類題目，而把因變量與自變量（independent variable）的角色互換、使方程變成線性的技巧，在大學一年級的微分方程課程中經常用到。上文的唯一性論證，是初值問題（initial value problem）的存在唯一性定理（existence and uniqueness theorem）的一個最簡單特例。還要留意，當第二部鏟雪車前方的積雪薄至全無時，它的速率會趨向無限大，這反映的是模型的局限，而不是現實情況。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）涵蓋一階線性方程、積分因子和唯一性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。