詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 10 題

純數學 • 模算術

> **STEP III 樣本試卷，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s3-q10

關鍵思路

兩部分都與餘數（remainder）有關，所以應選一個合適的數，以它為模（modulo）來計算。在 (i) 中，平方數模 8 只能取少數幾個值，而這些值中任取三個，相加都不可能得到 7。在 (ii) 中，把各個冪改寫，使兩項在模 17 下有相同的底；這樣兩個係數之和便是 17 的倍數。

解答

第 (i) 部分

*奇數的平方。*把奇數寫成 $2k+1$，其中 k 為整數。則

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1.$$

兩個連續整數 k 與 $k+1$ 之中必有一個是偶數，所以 $k(k+1)$ 是偶數，而 $4k(k+1)$ 是 8 的倍數。因此，每個奇數的平方除以 8 的餘數都是 1。

*偶數的平方。*把偶數寫成 $2k$。則 $(2k)^2 = 4k^2$。

- 若 k 是偶數，設 $k = 2j$，則 $4k^2 = 16j^2$，是 8 的倍數：餘數為 0。
- 若 k 是奇數，則 k^2 是奇數，設 $k^2 = 2j+1$，於是 $4k^2 = 8j+4$：餘數為 4。

所以每個偶數的平方除以 8 的餘數是 0 或 4。

*推論。*每個平方數模 8 都同餘（congruent）於 0、1 或 4（這包括 $0^2 = 0$，即我們容許三個平方數中有些是零）。假設 $N = a^2 + b^2 + c^2$。則 $N \bmod 8$ 是三個各取自 $\{0, 1, 4\}$ 的數之和的餘數。按其中有多少個等於 4 來分類：

4 的個數	其餘各數之和的可能值，以及總和模 8 的值
0	$0,1,2,3$
1	$4+\{0,1,2\}=4,5,6$
2	$8+\{0,1\}\equiv 0,1$
3	$12\equiv 4$

可能的餘數是 $0,1,2,3,4,5,6$，而 7 從未出現。形如 $8n+7$ 的數除以 8 的餘數是 7，所以它不可能是三個平方數之和。

想一想 為甚麼不能只驗證 7 本身不是三個平方數之和？

因為這個命題涉及無窮多個數 $7,15,23,\ldots$，逐一驗證永遠做不完。以 8 為模來計算，就能一次過處理所有情況：無論 a、b、c 是甚麼，要緊的只是它們的餘數，而上表已涵蓋每一種情形。

第 (ii) 部分

把各個冪拆開，使每一項都是常數乘以一個 n 次冪：

$$2^{3n+1}=2\cdot 8^n, \qquad\qquad 3\left(5^{2n+1}\right)=15\cdot 25^n.$$

由於 $25=17+8$，故 $25\equiv 8 \pmod{17}$，因此對所有 $n\geq 0$ 都有 $25^n\equiv 8^n \pmod{17}$（同餘式可以相乘）。於是

$$\begin{aligned} 2^{3n+1}+3\left(5^{2n+1}\right) &= 2\cdot 8^n+15\cdot 25^n \\ &\equiv 2\cdot 8^n+15\cdot 8^n \\ &= 17\cdot 8^n\equiv 0 \pmod{17}. \end{aligned}$$

所以對所有整數 $n\geq 0$，17 整除 $2^{3n+1}+3(5^{2n+1})$，這正是所要證明的。

想一想 如果我沒有學過同餘，怎麼辦？

同樣的想法可以用歸納法（induction）來實現。設 $f(n)=2\cdot 8^n+15\cdot 25^n$。則 $f(0)=17$，並且

$$f(n+1)-8f(n)=15\cdot 25^{n+1}-15\cdot 8\cdot 25^n=15\cdot 25^n(25-8)=17\cdot 15\cdot 25^n,$$

所以 $f(n+1)=8f(n)+17\cdot 15\cdot 25^n$。若 $17\mid f(n)$，則 $17\mid f(n+1)$，由歸納法即得結論。

驗算

試試較小的情況。$7 = 4+1+1+1$ 需要四個平方數，而 $15 = 9+4+1+1$ 同樣需要四個。另一方面，$6 = 4+1+1$ 和 $14 = 9+4+1$ 則沒有問題。電腦搜尋證實，在 5000 以內沒有任何形如 $8n+7$ 的數是三個平方數之和。至於 (ii)：$n = 0$ 時得 $2+15 = 17$，$n = 1$ 時得 $16+375 = 391 = 17\times 23$。我們亦已驗證，對由 0 至 299 的每個 n，該式都可被 17 整除。

常見錯誤

- 忘記 0 也是平方數，所以「三個平方數之和」其實可能只用了一個或兩個非零的平方數。上面的論證已自動包括這種情況，因為 0 是其中一個剩餘（residue）。
- 以「$4k^2+4k$ 可被 4 整除」為理由，說奇數的平方是 1 mod 8：這只能得出 1 mod 4。你還需要 $k(k+1)$ 所提供的因數 2。

STEP 之外

第 (i) 部分是勒讓德（Legendre）三平方和定理（three-square theorem）中較容易的一半：一個正整數是三個平方數之和，當且僅當它不是 $4^a(8n+7)$ 的形式。逆命題（converse）的方向困難得多，需要用到二次型（quadratic forms）的理論。相比之下，拉格朗日（Lagrange）證明了每一個正整數都是四個平方數之和。第 (ii) 部分是 $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ 中的日常算術，大學一年級的課程會由此發展出羣（groups）和環（rings）的研究。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）對同餘和平方和有十分精彩的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。