詳細解答

STEP III 樣本試卷，第 1 題

純數學 • 數學歸納法

STEP III 樣本試卷，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s3-q1

關鍵思路

第 (i) 部分：先算出最初幾個乘積，再用合適的角度去看：只要把每個乘積都寫成分母為 $2n$ 的形式，規律便一目了然。因式分解（factorisation）$1-\frac{1}{m^2}=\frac{(m-1)(m+1)}{m^2}$ 解釋了箇中原因，也令歸納步驟變成一行計算。第 (ii) 部分：固定 n，對 k 作歸納（induct）：在和式中多加一項，其實正是換了個樣子的帕斯卡法則（Pascal's rule）。

解答

第 (i) 部分

記 $P_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$。最初幾個值是

$$P_2=\frac{3}{4},\qquad P_3=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}=\frac{2}{3},\qquad P_4=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{16}=\frac{5}{8},\qquad P_5=\frac{5}{8}\cdot\frac{24}{25}=\frac{3}{5}.$$

分母 4、8 提示我們把所有分數都寫成以 $2n$ 為分母：$P_2=\frac{3}{4}$，$P_3=\frac{4}{6}$，$P_4=\frac{5}{8}$，$P_5=\frac{6}{10}$。於是我們猜想

$$P_n=\frac{n+1}{2n}\qquad \text{對於} n\geq 2.$$

用數學歸納法（induction）證明。設 $S(n)$ 為命題 $P_n=\dfrac{n+1}{2n}$。

基礎情況（*base case*）。$P_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$，所以 $S(2)$ 成立。

歸納步驟（*inductive step*）。假設 $S(n)$ 對某個 $n\geq 2$ 成立。由於 $P_{n+1}=P_n\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$，

而 $1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$，故

$$\begin{aligned}P_{n+1}&=\frac{n+1}{2n}\cdot\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\\&=\frac{n+2}{2(n+1)},\end{aligned}$$

這正是 $S(n+1)$。根據數學歸納法，$S(n)$ 對所有 $n\geq 2$ 成立。

（這個因式分解也解釋了上面的猜想：$P_n=\prod_{m=2}^{n}\frac{m-1}{m}\cdot\prod_{m=2}^{n}\frac{m+1}{m}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}$，兩個乘積都可以逐項相消（telescoping）。）

第 (ii) 部分

固定一個正整數 n，並設 $T(k)$ 為命題

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{n}{r}=(-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

我們對 k 作歸納，證明 $T(k)$ 對 $k=0,1,\ldots,n-1$ 成立。

基礎情況。當 $k=0$ 時，兩邊都等於 $\binom{n}{0}=\binom{n-1}{0}=1$。

歸納步驟。假設 $T(k)$ 對某個滿足 $0\leq k\leq n-2$ 的 k 成立（這樣 $k+1$ 仍在範圍之內）。加上下一項，

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\binom{n}{r}&=(-1)^k\binom{n-1}{k}+(-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}\\&=(-1)^{k+1}\left[\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}\right].\end{aligned}$$

想一想 $\binom{n}{k+1}-\binom{n-1}{k}$ 等於甚麼？

帕斯卡法則指出 $\binom{n}{k+1}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}$：從 n 件物件中選出 $k+1$ 件，某一件指定的物件要麼被選中（其餘 k 件來自另外 $n-1$ 件），要麼沒有被選中（全部 $k+1$ 件都來自另外 $n-1$ 件）。所以方括號內的式子等於 $\binom{n-1}{k+1}$，於是

$$\sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\binom{n}{r}=(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k+1},$$

這正是 $T(k+1)$。根據數學歸納法，$T(k)$ 對 $k=0,1,\ldots,n-1$ 成立，證明完畢。

若 $n=1$，唯一的情況是 $k=0$，基礎情況已經涵蓋，所以這個論證在該處無須特別處理。

驗算

- $P_{300} = \frac{301}{600} \approx 0.5017$；用電腦以分數把各因子精確相乘，結果對 2 至 300 的每一個 n 都與 $\frac{n+1}{2n}$ 吻合。當 $n \to \infty$ 時，乘積趨向 $\frac{1}{2}$。
- 當 $n = 4$ 時：部分和（partial sums）$1, 1-4 = -3, -3+6 = 3, 3-4 = -1$ 與 $\binom{3}{0}, -\binom{3}{1}, \binom{3}{2}, -\binom{3}{3}$ 吻合。電腦已對所有 $n \le 79$ 及所有 $k \le n-1$ 精確驗證 (ii)。
- 取 $k = n-1$，再加上最後一項 $(-1)^n\binom{n}{n}$，得 $(-1)^{n-1} + (-1)^n = 0$，這就是大家熟悉的結果 $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r} = (1-1)^n = 0$。

常見錯誤

- 根據約至最簡的分數（$\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{3}{5}$）來猜想，因而看不出規律：竅門在於把約分還原，寫成統一的形式。
- 在 (ii) 中對 n 而不是對 k 作歸納（可行，但較為繁複），或者忘記了由 k 到 $k+1$ 的一步只需在 $k+1 \le n-1$ 時進行。

STEP 之外

第 (i) 部分是無窮乘積（infinite product）$\prod_{m\ge 2}\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{2}$ 的開端。它是歐拉（Euler）乘積 $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{m\ge 1}\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)$ 的特殊情況：把兩邊除以 $m = 1$ 的因子 $1 - x^2$，再令 $x \to 1$ 即可。怎樣理解無窮乘積，以及它們何時收斂（converge），是大學一年級分析學（analysis）的課題。第 (ii) 部分是眾多二項式恆等式（binomial identities）之一，這些恆等式可由帕斯卡法則或生成函數（generating functions）推出：它就是 $(1-x)^n \cdot \frac{1}{1-x} = (1-x)^{n-1}$ 中 x^k 的係數。想了解無窮和與無窮乘積的收斂，Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門書）是很好的讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。