詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 9 題

純數學 • 球面、平面與反射

STEP II 樣本試卷，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s2-q9

關鍵思路

兩部分其實都圍繞同一幅圖：一個平面，以及向它所作的垂線。在 (i) 中，球面的球心在原點，所以一切都取決於由原點到平面的垂足（foot of the perpendicular）：它與 O 的距離決定兩者是否相交，然後用畢氏定理（Pythagoras' theorem）便可求出那個圓。在 (ii) 中，把 $\mathbf{x}$ 分拆成沿 $\mathbf{c}$ 方向的部分和垂直於 $\mathbf{c}$ 的部分，再看看公式對每一部分做了甚麼。

解答

第 (i) 部分

平面 $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0$ 通過點 $\mathbf{a}$，並以 $\mathbf{b}$ 為法向量（normal）。設 N 為由原點 O 到該平面的垂足。由於 ON 沿法向量方向，故對某個純量（scalar）λ 有 $\mathbf{n}=\lambda\mathbf{b}$；又因為 N 在平面上，

$$(\lambda\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2},$$

這一步是容許的，因為 $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$。所以

$$\mathbf{n}=\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad d=|\mathbf{n}|=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|},$$

其中 d 是由 O 到平面的距離。

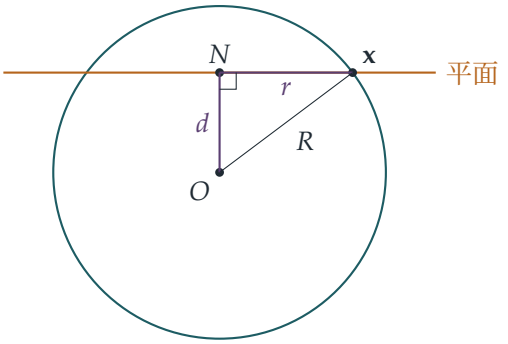
現在取平面上任意一點 $\mathbf{x}$。向量 $\mathbf{x}-\mathbf{n}$ 位於平面之內，所以它垂直於 $\mathbf{b}$，因而也垂直於 $\mathbf{n}$。由畢氏定理，

$$|\mathbf{x}|^2=|\mathbf{n}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2=d^2+|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2. \qquad (*)$$

所以平面上的點都滿足 $|\mathbf{x}| \geq d$，而且每一個滿足 $|\mathbf{x}| \geq d$ 的值都會出現（只要在平面內由 N 向外移動）。因此，球面 $|\mathbf{x}| = R$ 與平面相交，當且僅當 $R \geq d$，即

$$\boxed{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq R\,|\mathbf{b}|} \qquad \text{或等價地} \qquad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq R^2|\mathbf{b}|^2.$$

在等號成立的情況下，該平面是切平面（tangent plane），而那個「圓」則縮成單獨一點 N。



當條件成立時，同時在兩個曲面上的點滿足 $|\mathbf{x}| = R$，並且由 $(*)$ 得

$$|\mathbf{x}-\mathbf{n}|^2 = R^2 - d^2.$$

所以這些點都在平面內，並且與 N 保持固定距離，而後者本身是平面上的一點：它們組成一個以 N 為圓心的圓。其圓心和半徑為

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}, \qquad r = \sqrt{R^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2}} = \frac{\sqrt{R^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}}{|\mathbf{b}|}.$$

第 (ii) 部分

記 $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}/|\mathbf{c}|$，這是一個單位向量（unit vector）（由於 $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$，這樣做沒有問題）。於是該關係式變成

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}.$$

? **想一想** 從幾何上看，$(\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}$ 是甚麼？

它是 $\mathbf{x}$ 沿 $\mathbf{c}$ 方向的分量（component），亦即 $\mathbf{x}$ 在通過 O 而方向為 $\mathbf{c}$ 的直線上的投影（projection）。所以可作分拆

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}, \qquad \mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})\,\hat{\mathbf{c}}, \qquad \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel},$$

其中 $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{c} - (\mathbf{x}\cdot\hat{\mathbf{c}})(\hat{\mathbf{c}}\cdot\mathbf{c}) = 0$。關係式變成

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\parallel}.$$

設 Π 為通過 O 並垂直於 $\mathbf{c}$ 的平面（即平面 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$），則位於這個平面內的分量保持不變，而垂直於 Π 的分量則反轉方向。這正正是鏡子的作用：**$\mathbf{x}'$ 是 $\mathbf{x}$ 關於平面 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$ 的反射（reflection）**，即關於通過原點、以 $\mathbf{c}$ 為法向量的平面的反射。

以下按反射的定義加以確認：

- $\mathbf{x}'-\mathbf{x}=-2\mathbf{x}_{\parallel}$ 是 $\mathbf{c}$ 的倍數，所以由 $\mathbf{x}$ 到 $\mathbf{x}'$ 的線段垂直於 Π；
- 中點 $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{x}')=\mathbf{x}_{\perp}$ 滿足 $\mathbf{x}_{\perp}\cdot\mathbf{c}=0$，所以它在 Π 上。

以下幾個推論可令這幅圖像更具體。Π 上的點（即滿足 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{c}=0$ 的點）固定不動；$\mathbf{c}$ 本身變成 $-\mathbf{c}$；$|\mathbf{x}'|=|\mathbf{x}|$，因為 $|\mathbf{x}'|^2=|\mathbf{x}_{\perp}|^2+|\mathbf{x}_{\parallel}|^2$；而把這個映射連續施行兩次便會得回 $\mathbf{x}$，反射兩次理應如此。若把 $\mathbf{c}$ 換成任何非零倍數 $k\mathbf{c}$，關係式並無改變，這也很合理：起作用的只有那個平面，而不是其法向量的長度或指向。

驗算

在 (i) 中，取 $\mathbf{a}=\mathbf{b}=(0,0,1)$ 及 $R=2$：平面是 $z=1$，它與球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相交於圓 $x^2+y^2=3$，$z=1$。公式給出圓心 $(0,0,1)$ 和半徑 $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，與預期相符。在 (ii) 中，取 $\mathbf{c}=(0,0,1)$：公式把 (x,y,z) 映射到 $(x,y,-z)$，即關於 $z=0$ 的反射。我們亦以 20,000 組隨機選取的 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、R 以及 $\mathbf{x}$、$\mathbf{c}$ 對兩部分作了數值測試：在所預測的圓上構作的點，都在球面和平面上，誤差不超過 10^{-9}；而 (ii) 中的映射使 Π 內的向量固定不動，保持長度和點積（dot product）不變，並且是它自己的逆映射。

常見錯誤

- 忘記加上絕對值（modulus）：條件是 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\le R|\mathbf{b}|$，而不是 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\le R|\mathbf{b}|$；位於 O 另一側的平面有 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}<0$。
- 把 $\mathbf{a}$ 當作圓心。點 $\mathbf{a}$ 只不過是平面上的某一點；圓心是由 O 所作垂線的垂足。
- 在 (ii) 中，說成「關於 $\mathbf{c}$ 的反射」或「關於沿 $\mathbf{c}$ 的直線的反射」。關於該直線的反射應是 $\mathbf{x}\mapsto 2\mathbf{x}_{\parallel}-\mathbf{x}$，亦即 $-\mathbf{x}'$。

STEP 之外

(ii) 中的映射是一個豪斯霍爾德反射（*Householder reflection*），$\mathbf{x}\mapsto(I-2\hat{\mathbf{c}}\hat{\mathbf{c}}^{\mathsf{T}})\mathbf{x}$，它是一個線性映射（linear map），既正交（orthogonal）又對稱（symmetric），行列式（determinant）為 -1。空間中的每一個旋轉都是兩個這類反射的乘積，而數值分析學者利用它們來穩定地分解矩陣（QR 分解，QR decomposition）。Strang 的 *Introduction to*

Linear Algebra（線性代數入門）正是從這個觀點講解投影、反射和正交矩陣。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。