詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 7 題

純數學 • 階梯函數的積分

> **STEP II 樣本試卷，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q7

關鍵思路

被積函數（integrand）$[\mathrm{e}^x]$ 是一個階梯函數（step function）：在 e^x 保持於兩個相鄰整數之間的每個區間上，它都是常數。因此我們先找出這些區間，在每個區間上對常數積分，然後把結果加起來。這樣得出的和看似難以處理，但只要把相同的項對齊，當中大部分對數（logarithm）便會成對抵消。

解答

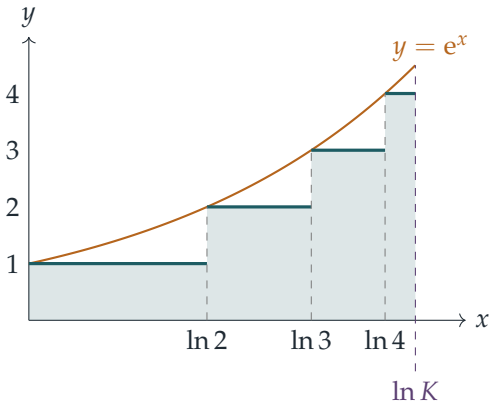
被積函數在哪裏是常數

我們取 $K \geq 1$，於是 $\ln K \geq 0$ 且 $N = [K] \geq 1$。（若 $0 < K < 1$，則對於介乎 $\ln K$ 與 0 之間的 x，有 $0 < \mathrm{e}^x \leq 1$，而除了 $x = 0$ 這單獨一點之外 $[\mathrm{e}^x] = 0$，所以 $I = 0$；同時 $N = 0$ 且 $N \ln K - \ln 0! = 0$。結果在這情況下同樣成立。）

對於整數 $k \geq 1$，

$$k \leq \mathrm{e}^x < k+1 \iff \ln k \leq x < \ln(k+1),$$

因為 ln 是遞增函數。所以在 $[\ln k, \ln(k+1))$ 上 $[\mathrm{e}^x] = k$。在積分範圍 $0 \leq x \leq \ln K$ 上有 $1 \leq \mathrm{e}^x \leq K$，故 $[\mathrm{e}^x]$ 取值 $1, 2, \ldots, N$，而最後一個值 N 在 $[\ln N, \ln K]$ 上取得，因為在該處 $N \leq \mathrm{e}^x \leq K < N+1$。



陰影部分的面積就是 I（圖中取 $K = 4.5$，故 $N = 4$）。

把各部分加起來

在每個區間上對常數積分，得

$$I = \sum_{k=1}^{N-1} k(\ln(k+1) - \ln k) + N(\ln K - \ln N).$$

（當 $N = 1$ 時，這個和是空的；當 $K = N$ 時，最後一項為零。兩種情況都無須另外處理。）

> **想一想** 怎樣化簡 $\sum k(\ln(k+1) - \ln k)$？照現在的形式，它並不能裂項相消（telescope）。

把它拆成兩個和，並在第一個和中移動指標，令 $j = k + 1$：

$$\sum_{k=1}^{N-1} k\ln(k+1) = \sum_{j=2}^{N}(j-1)\ln j.$$

現在兩個和都是 $\ln j$ 的倍數之和，我們可以把每個 $\ln j$ 的係數合併起來。利用 $\ln 1 = 0$，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N-1} k(\ln(k+1) - \ln k) &= \sum_{j=2}^{N}(j-1)\ln j - \sum_{j=2}^{N-1} j\ln j \\ &= (N-1)\ln N + \sum_{j=2}^{N-1}((j-1)-j)\ln j \\ &= (N-1)\ln N - \sum_{j=2}^{N-1}\ln j.\end{aligned}$$

加上最後一部分 $N\ln K - N\ln N$：

$$\begin{aligned} I &= N\ln K - \ln N - \sum_{j=2}^{N-1} \ln j \\ &= N\ln K - \sum_{j=1}^{N} \ln j \\ &= N\ln K - \ln(N!), \end{aligned}$$

這正是所要證明的結果。

更巧妙的看法

與其把陰影區域切成垂直的長條，不如把它切成水平的層。對於 $1 \le k \le N$，高度介乎 $k-1$ 與 k 之間的那一層，恰好出現在 $[\mathrm{e}^x] \ge k$ 的地方，也就是 $\mathrm{e}^x \ge k$ 的地方，即 $\ln k \le x \le \ln K$。該層的面積是 $\ln K - \ln k$，所以立刻得到

$$I = \sum_{k=1}^{N} (\ln K - \ln k) = N\ln K - \ln(N!)$$

。嚴格來說，這裏用到了當 $1 \le y < N+1$ 時 $[y] = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}[y \ge k]$，然後逐項積分。這與上面的指標移動是同一種重排，只不過是用幾何方式完成。

驗算

- $K = 1$：積分範圍的長度為零，而公式給出 $1 \cdot 0 - \ln 1 = 0$。
- $K = \mathrm{e}$：這時 $N = 2$，直接計算得 $I = \ln 2 + 2(1 - \ln 2) = 2 - \ln 2 \approx 1.3069$，與 $2\ln \mathrm{e} - \ln 2$ 吻合。
- 當 $K = 10$ 時，公式給出 $10\ln 10 - \ln(10!) \approx 7.9214$，而對 $[\mathrm{e}^x]$ 在 $[0, \ln 10]$ 上用中點法則作數值積分，結果相差不超過 5×10^{-6}。在 $[1, 40]$ 中隨機選取的 K 值亦同樣吻合。

常見錯誤

- 把和一直加到 N，並使用區間 $[\ln N, \ln(N+1)]$。積分範圍的上端是 $\ln K$，而不是 $\ln(N+1)$，所以最後一部分必須另外處理。
- 重新編排指標時弄錯首尾兩端的項：不妨把 $N = 3$ 時的各個和逐項寫出來檢查。

STEP 之外

把 $\sum k(a_{k+1}-a_k)$ 換成 $-\sum a_k$ 再加上邊界項，這就是*分部求和法*（summation by parts，又稱阿貝爾求和法（Abel summation）），它是分部積分法（integration by parts）的離散版本。取 $K=N$ 並利用 $\mathrm{e}^x-1<[\mathrm{e}^x]\le \mathrm{e}^x$，可得 $N\ln N-N+1\le \ln(N!)\le N\ln N-N+1+\ln N$，這是邁向斯特靈近似公式（Stirling's approximation）的第一步。同樣的想法寫成黎曼–斯蒂爾吉斯積分（Riemann–Stieltjes integral）$\int f\,\mathrm{d}[t]$ 之後，在解析數論（analytic number theory）中隨處可見，用來把和化為積分；參看 Apostol 的 *Introduction to Analytic Number Theory*（解析數論入門）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。