詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 6 題

純數學 • 由常微分方程推導加法公式

> **STEP II 樣本試卷，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q6

關鍵思路

題目不容許我們說「f 就是 e^x」，所以一切都必須由微分方程（differential equation）本身推導出來。我們唯一可以動用的工具是：若一個函數的導數（derivative）處處為零，則該函數為常數。因此竅門在於構造一個導數恰好互相抵消為零的式子，然後代入 $x = 0$ 來確定那個常數。把 $a - x$ 處的值與 x 處的值配對是很自然的做法，因為這兩個自變量之和恆為 a，而這正是加法公式（addition formula）的形狀。

解答

指數函數的加法定律

固定 a，並設 $p(x) = \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x)$。由鏈式法則（chain rule），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{f}(a-x)] = -\mathrm{f}'(a-x) = -\mathrm{f}(a-x)$，其中用到 $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$。於是由積法則（product rule）得

$$\begin{aligned} p'(x) &= -\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}'(x) \\ &= -\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) = 0, \end{aligned}$$

這就是第一個結果。

由於對每個 x 都有 $p'(x) = 0$，函數 p 是常數。它在 $x = 0$ 處的值為 $\mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(a)$，因為 $\mathrm{f}(0) = 1$。因此

$$\mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(a) \qquad \text{對所有 } x \text{ 及所有 } a \text{ 成立。}$$

現在任取 x 和 y，並選 $a = x + y$。那麼 $a - x = y$，而該恆等式變成

$$\mathrm{f}(y)\,\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x+y),$$

正是所求。

餘弦的加法公式

我們沿用同一策略，所以需要找出 c 與 s 在 $a-x$ 和 x 處取值的一個組合，使其導數為零。

> **想一想** 我們應該對哪一個組合求導？

讓答案來引導我們：取 $a = x+y$ 時，我們想得到 $\mathrm{c}(x)\mathrm{c}(y)-\mathrm{s}(x)\mathrm{s}(y)$，即 $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x)-\mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x)$。所以這就是值得一試的函數。

固定 a，並設

$$g(x) = \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{s}(x).$$

由鏈式法則及題目給出的導數，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{c}(a-x)] = -\mathrm{c}'(a-x) = \mathrm{s}(a-x), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{s}(a-x)] = -\mathrm{s}'(a-x) = -\mathrm{c}(a-x).$$

因此，由積法則，

$$\begin{aligned} g'(x) &= \big[\mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) - \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)\big] - \big[-\mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x) + \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x)\big] \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以 g 是常數，其值為

$$g(0) = \mathrm{c}(a)\,\mathrm{c}(0) - \mathrm{s}(a)\,\mathrm{s}(0) = \mathrm{c}(a)\cdot 1 - \mathrm{s}(a)\cdot 0 = \mathrm{c}(a).$$

故此對所有 x 和 a，都有 $\mathrm{c}(a-x)\mathrm{c}(x)-\mathrm{s}(a-x)\mathrm{s}(x) = \mathrm{c}(a)$。任給 x 和 y，取 $a = x+y$，則 $a-x = y$：

$$\mathrm{c}(x+y) = \mathrm{c}(x)\,\mathrm{c}(y) - \mathrm{s}(x)\,\mathrm{s}(y),$$

這就是所求的結果。

以同樣的方法處理 $h(x) = \mathrm{s}(a-x)\,\mathrm{c}(x) + \mathrm{c}(a-x)\,\mathrm{s}(x)$，可得 $h' = 0$ 及 $h(0) = \mathrm{s}(a)$，所以 $\mathrm{s}(x+y) = \mathrm{s}(x)\mathrm{c}(y) + \mathrm{c}(x)\mathrm{s}(y)$ 亦成立。

驗算

- 代入 $y = 0$：利用 $\mathrm{f}(0) = \mathrm{c}(0) = 1$ 及 $\mathrm{s}(0) = 0$，兩個結果分別化為 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(x)$ 和 $\mathrm{c}(x) = \mathrm{c}(x)$。
- 在餘弦的結果中代入 $y = -x$：$1 = \mathrm{c}(0) = \mathrm{c}(x)\mathrm{c}(-x) - \mathrm{s}(x)\mathrm{s}(-x)$，這其實就是換了個面貌的 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$。

- 我們以數值方法解了這些微分方程（採用龍格－庫塔法（Runge–Kutta method），不使用任何內置的指數函數或三角函數），並在 $[-3,3]$ 內隨機抽取 6o 對數值來檢驗兩個恆等式；例如取 $x = 0.7$ 和 $y = 1.1$ 時，餘弦結果的兩邊準確至四位小數均為 -0.2272。所有差值都小於 10^{-11}。

常見錯誤

- 對 $\mathrm{f}(a-x)$、$\mathrm{c}(a-x)$ 或 $\mathrm{s}(a-x)$ 求導時，忘記了鏈式法則帶來的負號。
- 寫到「導數為零」便停下來，沒有在 $x = 0$ 處求出常數的值，也沒有接着選取 $a = x + y$。
- 直接引用 $\cos(x+y)$ 的公式或 $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$，而這是題目明確禁止的。

STEP 之外

在大學裏，這才是定義指數函數和三角函數的嚴謹做法：把它們定義為微分方程的解（或定義為冪級數（power series）），然後由這個定義推導出每一個熟悉的性質。我們用到的事實，即導數處處為零的函數必為常數，是中值定理（Mean Value Theorem）的推論，而它同時說明了這些解是唯一的。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對這套理論有嚴謹細緻的建構。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。