詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 5 題

純數學 • 級數與積分界限

> **STEP II 樣本試卷，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q5

關鍵思路

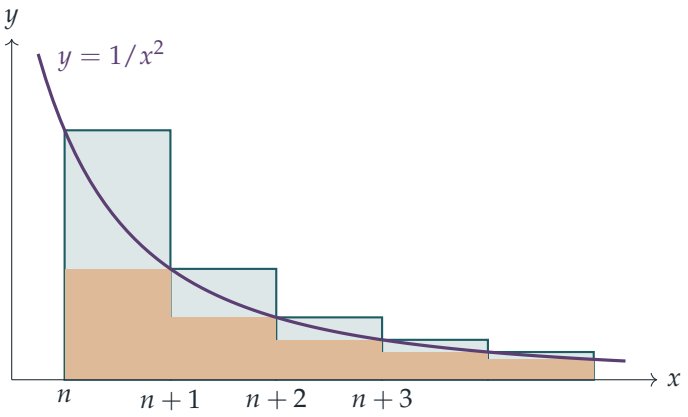
遞減函數（decreasing function）各個取值之和，可以想像成一列闊度為一個單位的長方形，而積分（integral）則是曲線下的面積。把長方形放在每個取樣點的右邊，它們便會凸出於曲線之上；放在左邊，它們便會收在曲線之下。這樣就得到夾逼的不等式，其後的一切都只是按部就班的整理：級數（series）的尾項和被夾在兩個簡單的分數之間，所以只要加上對尾項和的一個猜測，估計值便會大幅改善。

解答

夾逼

設 $f(x) = 1/x^2$，它在 $x > 0$ 時為正，並且嚴格遞減（strictly decreasing）。我們還需要

$$\int_n^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_n^M = \frac{1}{n}.$$



上方長方形（藍綠色外框）。在 $[r, r+1]$ 上放一個高度為 $f(r) = 1/r^2$ 的長方形。由於 f 遞減，當 $r < x \le r+1$ 時 $f(x) < f(r)$，所以這個長方形的面積 $1/r^2$ 嚴格大於 $\int_r^{r+1} f(x)\,\mathrm{d}x$。對 $r = n, n+1, \ldots$ 把這些式子相加，得

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}.$$

下方長方形（琥珀色）。在 $[r-1, r]$ 上放一個高度為 $f(r) = 1/r^2$ 的長方形。這次當 $r-1 \le x < r$ 時 $f(x) > f(r)$，所以這個長方形位於曲線之下，其面積 $1/r^2$ 嚴格小於 $\int_{r-1}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$。對 $r = n+1, n+2, \ldots$ 相加，而這些區間剛好填滿 $[n, \infty)$，於是

$$\int_n^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}.$$

（三個量都是有限的：積分等於 $1/n$，而兩個和都以它為界。）這就是所要求的一對不等式（inequality），在此把它們明確寫下來：

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n} > \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2}. \qquad (*)$$

夾住尾項和

記 $S_n = \sum_{r=1}^{n} 1/r^2$。那麼 $A - S_n$ 正好就是尾項和（tail）$T = \sum_{r=n+1}^{\infty} 1/r^2$。

由 $(*)$ 右邊的不等式可直接得到 $T < 1/n$。

> **想一想** $(*)$ 左邊的不等式中，求和由 $r = n$ 開始，但尾項和卻由 $r = n+1$ 開始。我們怎樣才能得到 T 的下界（lower bound）？

不等式 $(*)$ 對每一個正整數都成立，所以把 n 換成 $n+1$，再應用它左邊的一半：

$$T = \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{r^2} > \int_{n+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{1}{n+1}.$$

把兩者合起來，

$$\frac{1}{n} > A - \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} > \frac{1}{n+1},$$

這正是所要求的結果。

最小的 n

所有項都是正數，所以 $S_n < A$，而誤差就是 $A - S_n$。

- 若 $n \leq 9999$，則 $n+1 \leq 10^4$，所以 $A - S_n > \dfrac{1}{n+1} \geq 10^{-4}$：誤差太大。
- 若 $n = 10^4$，則 $A - S_n < \dfrac{1}{n} = 10^{-4}$：誤差夠小。

所以最小的值是 $n = 10\,000$。留意兩個不等式都是嚴格不等式，這一點在這裏十分關鍵：當 $n = 9999$ 時，下界剛好是 10^{-4}；而當 $n = 10^4$ 時，上界（upper bound）剛好是 10^{-4}。

改良的估計

在夾住尾項和的不等式中，每一部分都減去 $\frac{1}{n+1}$，得

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > A - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2}\right) > 0.$$

所以 $\frac{1}{n+1} + S_n$ 仍然低估了 A，但相差小於

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

當 $n = 10^4$ 時，這個值是 $\dfrac{1}{10^4 \times 10\,001} < \dfrac{1}{10^4 \times 10^4} = 10^{-8}$，所以改良後的估計值逼近 A 的誤差小於 10^{-8}，這正是所要求的結果。

額外加上的一項 $1/(n+1)$ 是對尾項和的一個猜測；既然尾項和被困在一個闊度只有 $1/(n(n+1))$ 的區間之內，這個猜測就不可能錯得太遠。

驗算

- 小數值的情況：取 $n = 1$，則 $S_1 = 1$，而 $A = \pi^2/6 \approx 1.6449$，所以 $A - S_1 \approx 0.645$，確實介乎 $\frac{1}{2}$ 與 1 之間。
- 利用 $A = \pi^2/6$ 並以數值方法求和：$A - S_{9999} \approx 1.00005 \times 10^{-4}$（僅僅太大）而 $A - S_{10000} \approx 0.99995 \times 10^{-4}$（僅僅夠小），由此確認 $n = 10\,000$。

- 當 $n = 10^4$ 時，改良後的估計值相差約 5.0×10^{-9}，低於界限 $1/(n(n+1)) \approx 1.0 \times 10^{-8}$；它大約是界限的一半，正如圖中所示（曲線把每個長方形凸出的部分大致分成兩半）。

常見錯誤

- 在 n 而不是 $n+1$ 處使用左邊的不等式，這樣得到的是 $\sum_{r=n}^{\infty}$ 的下界，而不是尾項和 $A - S_n$ 的下界。
- 把嚴格不等式當作非嚴格不等式，或只用了兩個界限的其中一個，因而答 $n = 9999$ 或 $n = 10\,001$。你需要用下界來排除 $n \leq 9999$，並用上界來確定 $n = 10^4$ 可行。
- 把長方形畫在每個取樣點的錯誤一邊，以致不等式的方向倒轉。

STEP 之外

這就是判別收斂（convergence）的積分審斂法（integral test），再加上它在定量方面的額外收穫：用來證明級數收斂的同一批長方形，也可以用來估計它的尾項和。把這個想法加以改進，即比較和與積分，再以兩端的導數（derivative）作修正，便會引出歐拉–麥克勞林公式（Euler–Maclaurin formula）。在這裏，該公式預測 $A - S_n \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3}$；歐拉（Euler）在證明 $\sum 1/r^2$ 等於 $\pi^2/6$ 之前，正是用這個方法把它計算到小數點後許多位。Abbott 的 *Understanding Analysis* 對級數及其審斂法有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。