詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 4 題

純數學 • 雙曲函數

> **STEP II 樣本試卷，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q4

關鍵思路

這些恆等式（identity）每一條所講的，都只是一個角（或一個雙曲「角」）。先為右邊的式子起一個名字，讀出它的其中一個函數值，再利用畢氏恆等式（Pythagorean identities）$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 和 $1+\sinh^2 u=\cosh^2 u$ 求出另一個。唯一真正要小心的是平方根的正負號，而這正是主值（principal value）範圍發揮作用的地方——到了最後一部分，也正是恆等式不再成立的地方。

解答

第 (i) 部分

設 $\theta=\tan^{-1}(\sinh x)$，則 $\tan\theta=\sinh x$，而且由於它是主值，$-\frac{1}{2}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi$。於是

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\sinh^2 x=\cosh^2 x.$$

在 $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 上有 $\cos\theta>0$，所以 $\sec\theta>0$；而 $\cosh x>0$ 恆成立。取正平方根，得 $\sec\theta=\cosh x$，因此

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\tanh x.$$

由於 θ 位於 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ 之內，即 $\sin^{-1}$ 的主值範圍，這正好表示 $\theta=\sin^{-1}(\tanh x)$。因此對所有實數 x 都有 $\sin^{-1}(\tanh x)=\tan^{-1}(\sinh x)$，這就是所要證明的結果。

> ? **想一想** 為甚麼得到 $\sin\theta=\tanh x$ 還不算完成論證？

因為 $\sin\theta=\tanh x$ 有無窮多個解 θ。正因為我們的 θ 位於 $[-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi]$ 之內，而 sin 在這

個區間上是一對一（one-to-one）的，我們才可以斷定 θ 就是主值 $\sin^{-1}(\tanh x)$。同一個範圍也決定了 $\sec\theta$ 的正負號。

第 (ii) 部分

設 $u = \sinh^{-1}(\tan y)$；它有定義，因為當 $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$ 時 $\tan y$ 是有限的。於是 $\sinh u = \tan y$，而在第 (i) 部分取 $x = u$，可得

$$\sin^{-1}(\tanh u) = \tan^{-1}(\sinh u) = \tan^{-1}(\tan y) = y,$$

其中最後一步用到 $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$，即 $\tan^{-1}$ 的主值範圍。對兩邊取 sin，得 $\tanh u = \sin y$。由於在這個區間上 $|\sin y| < 1$，$\tanh^{-1}(\sin y)$ 有定義，而且 tanh 是一對一的，所以 $u = \tanh^{-1}(\sin y)$。也就是說，

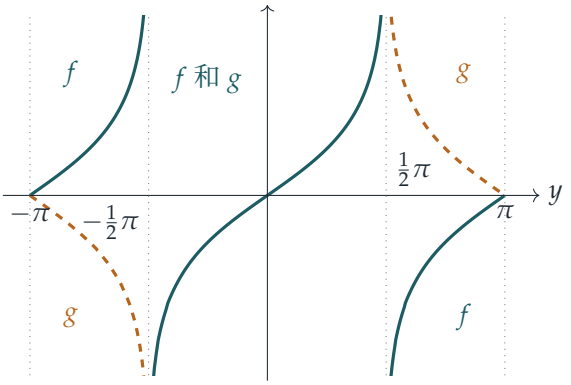
$$\sinh^{-1}(\tan y) = \tanh^{-1}(\sin y) \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi\right).$$

（直接計算：$\cosh u = \sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$，因為 $\cos y > 0$ 所以取正值，於是 $\tanh u = \tan y \cos y = \sin y$。）

草圖 記 $f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$ 和 $g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$。兩者在 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$ 處都沒有定義，因為在該處 $\tan y$ 為無窮大，而 $\sin y = \pm 1$。它們在其他地方的表現，可由 tan 和 sin 的對稱性推出。

- 兩者都是奇函數（odd function），並且都在 $y = 0$ 和 $y = \pm\pi$ 處取零值。
- f 的周期（period）為 π，因為 tan 也是如此。所以在 $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ 上，它重複在 $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 上的取值：由 $-\infty$ 上升至 0。
- $\sin(\pi - y) = \sin y$，所以 g 關於 $y = \frac{1}{2}\pi$ 對稱。在 $(\frac{1}{2}\pi, \pi)$ 上，它以鏡像方式重複在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上的取值：由 $+\infty$ 下降至 0。
- 求導數，得 $f'(y) = \dfrac{\sec^2 y}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = |\sec y|$ 和 $g'(y) = \dfrac{\cos y}{1-\sin^2 y} = \sec y$。所以 f 在每一個有定義的區間上都是遞增的，而 g 在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上遞增，在這個區間以外則遞減。兩者在原點的斜率都是 1；在 $y = \pi$ 處，f 的斜率為 1，g 的斜率為 -1。

在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 上，兩個圖像是同一條曲線；在外側的區間上，兩者互為對方關於橫軸的反射。



實線：$f(y) = \sinh^{-1}(\tan y)$。虛線：$g(y) = \tanh^{-1}(\sin y)$ 與 f 不同的部分。點線 $y = \pm\frac{1}{2}\pi$ 是漸近線（asymptote）。

$\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 時的關係 草圖顯示在該處 $f = -g$，而我們可以證明這一點。若 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$，則 $y - \pi$ 位於 $(-\frac{1}{2}\pi, 0)$ 之內，所以剛才證明的恆等式適用於 $y - \pi$：

$$\begin{aligned}\sinh^{-1}(\tan y) &= \sinh^{-1}\big(\tan(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}\big(\sin(y-\pi)\big)\\ &= \tanh^{-1}(-\sin y) = -\tanh^{-1}(\sin y),\end{aligned}$$

這裏用到 $\tan(y-\pi) = \tan y$、$\sin(y-\pi) = -\sin y$，以及 $\tanh^{-1}$ 是奇函數這個事實。所以當 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 時，

$$\sinh^{-1}(\tan y) = -\tanh^{-1}(\sin y).$$

（由奇函數的性質，同樣的關係在 $-\pi < y < -\frac{1}{2}\pi$ 上也成立。）

想一想 當 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 時，第 (ii) 部分的論證在哪一步失效？

在 $\tan^{-1}(\tan y) = y$ 這一步：當 y 在 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 以外時，主值是 $y - \pi$，而不是 y。換一個說法，在直接計算的論證中，該處有 $\sqrt{1+\tan^2 y} = |\sec y| = -\sec y$，因為 $\cos y < 0$，而這個負號正是答案中的那個負號。

驗算

- 在 $y = 1$：$\sinh^{-1}(\tan 1) = \tanh^{-1}(\sin 1) \approx 1.2262$。在 $y = 2$：$\sinh^{-1}(\tan 2) \approx -1.5235$，而 $\tanh^{-1}(\sin 2) \approx 1.5235$，確認了正負號的改變。
- 正負號：當 $\frac{1}{2}\pi < y < \pi$ 時，$\tan y < 0$ 但 $\sin y > 0$，所以兩個式子必定異號；它們不可能相等。

- 第 (i) 部分在 x 很大時：兩邊都趨向 $\frac{1}{2}\pi$，與預期相符。

我們以數值方法在 10^5 個隨機點上檢驗了兩條恆等式，以及 $f = -g$ 在 $\frac{1}{2}\pi < |y| < \pi$ 上的關係。

常見錯誤

- 寫出 $\sqrt{1+\tan^2 y} = \sec y$ 而沒有檢查 $\sec y$ 的正負號。這正是最後一部分的重點所在。
- 由 $\sin\theta = \tanh x$ 直接斷定 $\theta = \sin^{-1}(\tanh x)$，卻沒有說明為甚麼 θ 是主值。
- 把 g 在 $\frac{1}{2}\pi$ 以外的部分畫成與 f 相同的形狀：g 承襲的是 sin 關於 $\frac{1}{2}\pi$ 的對稱性，而不是 tan 的周期性。

STEP 之外

函數 $\mathrm{gd}(x) = \tan^{-1}(\sinh x) = \sin^{-1}(\tanh x)$ 稱為古德曼函數（Gudermannian function）。它無需借助複數（complex numbers），便把圓函數與雙曲函數（hyperbolic functions）聯繫起來，而第 (ii) 部分說明它的反函數（inverse function）是 $\sinh^{-1}(\tan y)$。它出現在麥卡托（Mercator）地圖投影之中，用來把地圖上的縱坐標轉換為緯度。反函數及其分支（branches）在這裏令恆等式出現問題；當你研究複數 z 的 $\log z$ 和 $z^{1/2}$ 時，它們更會成為核心課題。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是領略這個課題的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。