詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 3 題

純數學 • 棣美弗定理

> **STEP II 樣本試卷，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q3

關鍵思路

棣莫弗定理（De Moivre's theorem）用數學歸納法（induction）證明最為自然：根據複角公式（compound-angle formulae），每多乘一個因子 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，角度就增加 θ。至於那兩條方程，$\cos ky$、$\sin ky$ 伴隨着 x^k 出現，這個規律分明在提示「實部（real part）與虛部（imaginary part）」。設 $z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$，把第一條方程看成一條複數方程的實部，第二條看成它的虛部，這對方程便化為 z 的一條三次方程（cubic），而且有一個容易找到的根。

解答

棣莫弗定理

我們對 n 用歸納法。當 $n = 1$ 時，兩邊都是 $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，所以結果成立。

假設結果對某個 $n = k \geq 1$ 成立。則

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + \mathrm{i}(\sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + \mathrm{i}\sin(k+1)\theta,\end{aligned}$$

其中第一行用了歸納假設（induction hypothesis），第二行用了 $\mathrm{i}^2 = -1$，第三行用了 $\cos(A+B)$ 和 $\sin(A+B)$ 的複角公式。所以結果對 $n = k+1$ 成立，由歸納法可知，結果對所有正整數 n 都成立。

解方程

設 x 和 y 為實數，並令

$$z = x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

由棣莫弗定理，對 $n = 1, 2, 3$，

$$z^n = x^n(\cos y + \mathrm{i}\sin y)^n = x^n \cos ny + \mathrm{i}\, x^n \sin ny.$$

（無論 x 是正是負，這都成立：實數因子 x 直接提出來成為 x^n。）由於 x 和 y 是實數，兩條方程的左邊正好是 $z^3 + 2z^2 + 2z$ 的實部和虛部。所以這對實數方程等價於一條複數方程

$$z^3 + 2z^2 + 2z = -1, \qquad \text{即} \qquad z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0.$$

? **想一想** 為甚麼一條複數方程等同於兩條實數方程？

兩個複數相等，當且僅當它們的實部相同、虛部也相同。右邊的 -1 的實部是 -1，虛部是 0，正是題目給出的兩個右邊的值。所以 (x, y) 同時滿足兩條實數方程，當且僅當 z 滿足該三次方程。

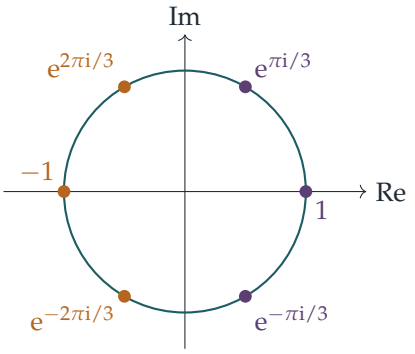
現在 $z = -1$ 是一個根，因為 $-1 + 2 - 2 + 1 = 0$，除去這個因式後得

$$z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1).$$

這個二次式的根是 $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3})$。所以三個根是

$$z = -1 = \cos \pi + \mathrm{i}\sin \pi, \qquad z = \cos \tfrac{2\pi}{3} \pm \mathrm{i}\sin \tfrac{2\pi}{3},$$

全部位於單位圓（unit circle）上。



餘下要做的，是把每個根還原為實數對 (x, y)。由於 $|z| = |x|$，每個解都有 $|x| = 1$；特別地，$x = 0$ 是不可能的（否則會得出 $0 = -1$）。

- 若 $x = 1$，則 $\cos y + \mathrm{i}\sin y = z$，所以 y 是三個根之一的輻角（argument）：$y = \pi$、$\frac{2\pi}{3}$ 或 $-\frac{2\pi}{3}$，再加上 2π 的任意整數倍。
- 若 $x = -1$，則 $\cos y + \mathrm{i}\sin y = -z$，即 1、$\cos\frac{\pi}{3} \mp \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ 其中之一（圖中梅子色的點）。所以 $y = 0$、$-\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{3}$，再加上 2π 的任意整數倍。

以上每一個都給出三次方程的一個根，所以全部都是解。設 k 為任意整數，解為

$$x = 1, \quad y = \pi + 2k\pi \text{ 或 } y = \pm\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi; \qquad x = -1, \quad y = 2k\pi \text{ 或 } y = \pm\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

在 $[0, 2\pi)$ 內共有六對：$(1, \frac{2\pi}{3})$、$(1, \pi)$、$(1, \frac{4\pi}{3})$、$(-1, 0)$、$(-1, \frac{\pi}{3})$、$(-1, \frac{5\pi}{3})$。

驗算

試 $x = -1$、$y = 0$：第一條方程給出 $-1 + 2 - 2 = -1$，第二條是 $0 = 0$。試 $x = 1$、$y = \frac{2\pi}{3}$：各餘弦值為 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$，得 $1 - 1 - 1 = -1$；各正弦值為 $0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $0 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$。用電腦在 $x \in [-3, 3]$、$y \in [0, 2\pi)$ 的細密網格上搜索，只在上述六點找到近似解（在捨入誤差之內），所以沒有遺漏。

常見錯誤

- 以為 x 是模（modulus），因而 $x \geq 0$。題目容許 x 為任意實數，$x = -1$ 的解同樣有效；它們是同一批點 z，只是描述時 y 平移了 π。
- 忘記 $+2k\pi$：y 只確定到相差 2π 的整數倍，所以有無限多對 (x, y)。

STEP 之外

把兩條實數方程合併成一條複數方程，是一個標準手法：以 $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ 為變數的多項式，其實部和虛部正好滿足這類三角方程組，而因式分解 $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = (z + 1)(z^2 + z + 1)$ 則把各根放在單位圓上。在大學的入門課程中，你會見到 $e^{\mathrm{i}\theta}$ 以冪級數（power series）定義，這令棣莫弗定理對所有整數都成立（並賦予非整數次冪意義，但須小心處理分支（branches））。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 以優美的幾何角度闡述了這一切。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。