詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 2 題

純數學 • 對稱聯立方程

> **STEP II 樣本試卷，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q2

關鍵思路

三條方程具有循環（cyclic）對稱性，所以很自然會把它們兩兩相減，而每個差都可以因式分解（factorise），並以 $x+y+z$ 為公因式（common factor）。接下來，各差的平方和有雙重用途：以 x、y、z 表示時，它是 $a+b+c$ 的倍數；而第一個結果則可把它用 $a-b$、$b-c$、$c-a$ 和 $x+y+z$ 表示。一旦知道 $x+y+z$ 和兩兩之差，餘下的工作只需解三條線性方程（linear equations）便可完成。

解答

相等的比

把第一條方程減去第二條方程：

$$\begin{aligned} a-b &= x^2-y^2-yz+zx \\ &= (x-y)(x+y)+z(x-y) \\ &= (x-y)(x+y+z). \end{aligned}$$

用完全相同的方法（或作循環代換 $x\to y\to z\to x$，$a\to b\to c\to a$），可得

$$b-c=(y-z)(x+y+z), \qquad c-a=(z-x)(x+y+z).$$

設 $S=x+y+z$。由於 $a\neq b$，乘積 $(x-y)S$ 不等於零，所以 $S\neq 0$（同理，x、y、z 互不相等）。因為 a、b、c 互不相等，我們可以除以 $a-b$、$b-c$、$c-a$ 以及 S，得出

$$\frac{y-z}{b-c}=\frac{z-x}{c-a}=\frac{x-y}{a-b}=\frac{1}{x+y+z},$$

這正是所要證明的結果。

求 $x+y+z$

把題目提示的和展開：

$$\begin{aligned}(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2 &= 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\ &= 2[(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)]\\ &= 2(a+b+c).\end{aligned}$$

另一方面，由第一部分可知 $y-z=(b-c)/S$，其餘類推，所以同一個和亦等於

$$\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{S^2}=\frac{2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}{S^2}.$$

令兩個表達式相等，再除以 $2(a+b+c)$（因為 a、b、c 均為正數，所以它是正數），得

$$S^2=\frac{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab}{a+b+c}.$$

因此 $x+y+z=\triangle$，其中 $\triangle^2$ 就是上述的量，這正是所要證明的結果。注意 $\triangle^2>0$，因為它的分子是 $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ 的一半，而當 a、b、c 互不相等時，這個和是正數。所以有兩個可能，即 $\triangle=\pm\sqrt{\triangle^2}$，而到目前為止，沒有任何條件能從中選定其一。

解方程

現在我們知道

$$x+y+z=\triangle,\qquad x-y=\frac{a-b}{\triangle},\qquad x-z=\frac{a-c}{\triangle}.$$

把三式相加，得

$$3x=\triangle+\frac{2a-b-c}{\triangle}=\frac{\triangle^2+2a-b-c}{\triangle}.$$

這個式子可以化簡得很漂亮。設 $s=a+b+c$ 和 $Q=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$，於是 $\triangle^2=Q/s$。那麼

$$\begin{aligned}s(\triangle^2+2a-b-c) &= Q+(a+b+c)(2a-b-c)\\ &= (a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)+(2a^2+ab+ca-b^2-c^2-2bc)\\ &= 3(a^2-bc).\end{aligned}$$

因此 $x=\dfrac{a^2-bc}{s\triangle}$，而 y、z 可由循環代換得出。現在 $(s\triangle)^2=sQ=a^3+b^3+c^3-3abc$，這是根據以下的標準因式分解：

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

設 $K = \sqrt{a^3+b^3+c^3-3abc} > 0$，則 $s\triangle = \pm K$，而方程組的解為

$$(x,y,z) = \pm\frac{1}{K}(a^2-bc,\ b^2-ca,\ c^2-ab),$$

其中三個分量取相同的正負號。

? **想一想** 我們只證明了任何解都必定是這個形式。這兩組真的都是解嗎？

是的。以上所有步驟只是一連串的推論，所以我們應該把結果代回原方程驗證。由於方程中只出現未知數的平方和兩個未知數的乘積，整體的正負號並無影響，而

$$\begin{aligned}(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab) &= a^4-2a^2bc+b^2c^2-(b^2c^2-ab^3-ac^3+a^2bc)\\ &= a(a^3+b^3+c^3-3abc) = aK^2.\end{aligned}$$

除以 K^2 便得 $x^2-yz=a$；另外兩條方程可由循環代換得出。所以方程組恰好有兩組解，其中一組是另一組的相反數。

驗算

- 取 $a=1$，$b=2$，$c=3$。那麼 $a^3+b^3+c^3-3abc=18$，$K=3\sqrt{2}$，而取正號的解是 $(x,y,z)=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-5,1,7)$。例如 $x^2-yz=\frac{25-7}{18}=1$，以及 $x+y+z=\frac{1}{\sqrt{2}}$，其平方為 $\frac{1}{2}=\frac{14-11}{6}=\triangle^2$。
- 以電腦測試了 20,000 組隨機選取、互不相等的正數 a、b、c，並且兩種正負號都測試過：公式滿足全部三條方程以及相等的比，相對誤差小於 10^{-11}。

常見錯誤

- 只取 $\triangle$ 的正平方根：題目中的 $\triangle$ 只是透過 $\triangle^2$ 來定義，而兩種正負號都給出真正的解。
- 除以 $x+y+z$ 時沒有說明它為何不等於零。在這裏，這是由 $a\neq b$ 推出的。

STEP 之外

恆等式 $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 是以 (a,b,c)、(c,a,b)、(b,c,a) 為各行的循環矩陣（circulant matrix）的行列式（determinant），而它在複數（complex numbers）範圍內可以完全分解為 $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$，其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$。事實上，映射 $(x,y,z)\mapsto(x^2-yz,\ y^2-zx,\ z^2-xy)$ 就是循環矩陣的伴隨矩陣（adjugate），這解釋了為何它那麼容易求逆。循環矩陣及其特徵向量

（eigenvectors）是初次接觸離散傅立葉變換（discrete Fourier transform）的一個平易入門；想進一步了解，Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教科書）是很好的讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。