詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 16 題

概率與統計 • 淘汰賽的概率

> **STEP II 樣本試卷，第 16 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q16

本題在 *Beyond STEP* 第 12.7 節淘汰賽中誰會遇上誰中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/knockout.html

關鍵思路

逐輪追蹤兩位選定的選手 A 和 B。在任何一輪中，只要兩人仍未出局又未曾交手，就只有兩件事要緊：A 是否抽中與 B 對賽？若否，兩人是否都勝出？這兩者都是簡單的概率（probability），而由此得出的乘積會漂亮地逐項相消。至於最後一部分，還有一個巧妙的對稱性（symmetry）論證：數一數整個淘汰賽中的比賽場數。

解答

記 $N = 2^n$，並稱兩位選定的選手為 A 和 B。經過 $r-1$ 輪後，餘下 2^{n-r+1} 位選手，所以第 r 輪有 $M_r = 2^{n-r+1}$ 位選手，而第 n 輪（此時 $M_n = 2$）就是決賽。

我們會反覆用到以下事實：若 A 和 B 同在 M 位隨機配對的選手之中，則 A 的對手等可能地是其餘 $M-1$ 位選手中的任何一位，所以

$$\mathrm{P}(A \text{ 抽中與 } B \text{ 對賽}) = \frac{1}{M-1}.$$

（決賽不設抽籤，但代入 $M = 2$ 時公式給出 1，結果正確。）

第 (i) 部分

在第一輪中 $M_1 = N$，所以

$$\mathrm{P}(A \text{ 和 } B \text{ 在第一輪相遇}) = \frac{1}{2^n - 1}.$$

第 (ii) 部分

設 S_r 為「A 和 B 在第 r 輪開始時都仍在賽事之中」這個事件（event）（這必然表示兩人尚未交手，因為每場比賽的負方即告出局）。在 S_r 發生的條件下，兩人一同晉身第 $r+1$ 輪，當且僅當他們在第 r 輪沒有抽中對賽，然後各自在（不同的）比賽中勝出。兩場比賽的結果互相獨立（independent），勝出的概率各為 $\frac{1}{2}$，所以

$$\mathrm{P}(S_{r+1} \mid S_r) = \frac{M_r - 2}{M_r - 1} \cdot \frac{1}{4}.$$

? **想一想** 怎樣把它化成一個我們真正算得出來的乘積？

記 $M = 2^k$，並留意 $M - 2 = 2(2^{k-1} - 1)$，所以

$$\frac{M-2}{M-1} = \frac{2\,(2^{k-1} - 1)}{2^k - 1}.$$

某一輪的分子（撇除因子 2 不計）正是下一輪的分母。由於 S_1 是必然事件，把 $k = n, n-1, \ldots, n-r+2$ 各輪的結果相乘，便得到一個裂項相消的乘積（telescoping product）：

$$\mathrm{P}(S_r) = \frac{1}{4^{r-1}} \prod_{k=n-r+2}^{n} \frac{2\,(2^{k-1} - 1)}{2^k - 1} = \frac{2^{r-1}}{4^{r-1}} \cdot \frac{2^{n-r+1} - 1}{2^n - 1} = \frac{2^{n-r+1} - 1}{2^{r-1}\,(2^n - 1)}.$$

在 S_r 發生的條件下，兩人在第 r 輪相遇的概率為 $1/(M_r - 1) = 1/(2^{n-r+1} - 1)$，所以

$$\mathrm{P}(A \text{ 和 } B \text{ 在第 } r \text{ 輪相遇}) = \frac{1}{2^{r-1}\,(2^n - 1)}.$$

這條公式簡潔得令人欣喜：每過一輪，在該輪相遇的機會就減半。取 $r = 1$ 便重新得到第 (i) 部分的結果。至於決賽，取 $r = n$：

$$\mathrm{P}(A \text{ 和 } B \text{ 在決賽相遇}) = \frac{1}{2^{n-1}\,(2^n - 1)}.$$

再用對稱性核對一下是否合理：賽制對每位選手一視同仁，所以決賽的兩位選手等可能地是 $\binom{N}{2} = 2^{n-1}(2^n - 1)$ 對選手中的任何一對，由此得出相同的答案。

第 (iii) 部分

對 $r = 1, \ldots, n$，「在第 r 輪相遇」這些事件互斥（mutually exclusive）（兩位選手最多只能交手一次，因為負方會離場），所以我們可利用等比級數（geometric series）把概率相

加：

$$\mathrm{P}(A \text{ 和 } B \text{ 相遇}) = \frac{1}{2^n-1}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^n-1}\cdot 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$
$$= \frac{2}{2^n}\cdot\frac{2^n-1}{2^n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

想一想 有沒有方法可以完全不用求和就看出這個答案？

有。每場比賽恰好淘汰一位選手，而除冠軍外所有人都會被淘汰，所以比賽總是恰好有 2^n-1 場。每場比賽由一對選手進行，而根據對稱性，$\binom{N}{2}$ 對選手中每一對交手的概率都相同，設為 p。比賽場數的期望值（expected value）等於所有選手對的這些概率之和，所以

$$\binom{2^n}{2}p = 2^n-1 \quad\Longrightarrow\quad p = \frac{2(2^n-1)}{2^n(2^n-1)} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

與求和所得的結果一致。

驗算

- $n=1$：只有兩位選手，他們必定在第一輪相遇，而這一輪就是決賽。三條公式都給出 1。
- $n=2$：四位選手。第 (i) 部分給出 $\frac{1}{3}$，決賽給出 $\frac{1}{6}$，而總和是 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，與第 (iii) 部分所說的相符。
- $n=3$：把每一種抽籤結果和每一種賽果逐一列舉，準確算出 $\frac{1}{7}$、$\frac{1}{28}$ 和 $\frac{1}{4}$。以 16 位選手模擬 2×10^5 次淘汰賽，得出 0.0664、0.0085 和 0.1247，而準確值則為 $\frac{1}{15}\approx0.0667$、$\frac{1}{120}\approx0.0083$ 和 $\frac{1}{8}$。

常見錯誤

- 忘記了兩位選手若要在較後的一輪相遇，必須先在之前的每一輪都避開對方：因子 $\frac{M-2}{M-1}$ 很容易漏掉。
- 把第 (ii) 部分答作 $\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$，即假如兩人互相獨立時雙雙打入決賽的機會。但他們並不獨立：若兩人早早抽中對賽，最多只有一人能夠晉級。

STEP 之外

第 (iii) 部分的論證，其實是配合指示變量（indicator variable）使用的期望值的線性性質（linearity of expectation）：不論各事件是否獨立，比賽場數的期望值都等於所有選

手對各自交手的概率之和。這是概率論和組合數學（combinatorics）中最強大的工具之一，也是用來證明具有指定性質的對象確實存在的「概率方法」（probabilistic method）的基礎。Blitzstein 與 Hwang 合著的 *Introduction to Probability*（概率入門教科書）有一整章精彩的例子，示範以指示變量立論的方法。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。