詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 15 題

概率與統計 • 期望值與樣本平均值

STEP II 樣本試卷，第 15 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s2-q15

關鍵思路

國王每天向極大量的小販罰款，所以根據大數定律（law of large numbers），他每天從每名小販身上得到的收入，實際上就等於罰款的期望值（expected value）。因此我們要求出每個方案下的期望罰款。頭兩個方案涉及一組正態變量的樣本平均值（sample mean），其分佈仍然是正態分佈（normal distribution），只是方差（variance）較小。第三個方案是等待時間的問題，所以要用上幾何分佈（geometric distribution）。

解答

設 $W_1, W_2, \ldots$ 為被選中的那箱醃魚各自的重量（以克為單位）。箱中的醃魚基本上是隨機選出的，所以各 W_i 互相獨立（independent），而且每個 $W_i \sim \mathrm{N}(200, 10^2)$。從箱中隨機抽取醃魚，與牠們的重量無關，所以無論我們抽出哪些醃魚、次序如何，牠們仍然是獨立的 $\mathrm{N}(200, 10^2)$ 變量。

我們會用到以下的標準結果：若 $W_1, \ldots, W_m$ 是獨立的 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ 變量，則它們的平均值滿足

$$\overline{W} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} W_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{m}\right).$$

第 (i) 部分

這裏 $m = 625$，所以 $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{625}\right)$，標準差（standard deviation）為 $\frac{10}{25} = 0.4$。於是

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 199) = \Phi\left(\frac{199 - 200}{0.4}\right) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) \approx 1 - 0.99379 = 0.00621.$$

期望罰款為

$$1500 \times 0.00621 \approx 9.3 \text{ 克朗}.$$

第 (ii) 部分

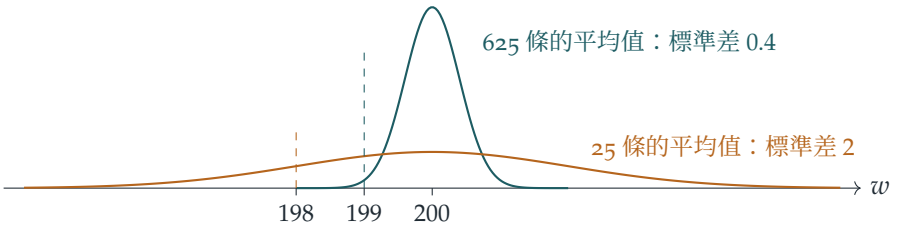
現在 $m = 25$，所以 $\overline{W} \sim \mathrm{N}\left(200, \frac{100}{25}\right)$，標準差為 2。於是

$$\mathrm{P}(\overline{W} < 198) = \Phi\left(\frac{198 - 200}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0.84134 = 0.15866,$$

而期望罰款為

$$100 \times 0.15866 \approx 15.9 \text{ 克朗}.$$

下圖說明了為何金額較小的罰款反而勝出。對 625 條鼬魚的平均值來說，比平均值低一克的門檻距離平均值有 2.5 個標準差；但對 25 條鼬魚的平均值來說，比平均值低兩克的門檻只相距一個標準差。



第 (iii) 部分

設 N 為取出的鼬魚數目。每條鼬魚重於 200 g 的概率是 $\frac{1}{2}$，因為 200 是一個對稱分佈的平均值，而且 $\mathrm{P}(W = 200) = 0$。抽出的鼬魚互相獨立，所以 N 就是在成功概率為 $\frac{1}{2}$ 的獨立試驗中，直至首次成功為止（包括該次在內）的試驗次數。換言之，N 服從幾何分佈：

$$\mathrm{P}(N = n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

（嚴格來說，抽完 625 條鼬魚後箱子就空了，但當中沒有一條超過 200 g 的機會是 2^{-625}，完全可以忽略不計。）

想一想 怎樣可以不先計算 $\mathrm{E}[N^2]$ 而求出 $\mathrm{E}[N(N-1)]$？

把幾何級數（geometric series）求導兩次。對於 $|x| < 1$，

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

乘以 x^2 並代入 $x = \frac{1}{2}$（$n = 1$ 的一項反正是零）：

$$\mathrm{E}[N(N-1)] = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$$

（等價地，取 $p = \frac{1}{2}$，則 $\mathrm{E}[N] = 2$ 及 $\mathrm{Var}(N) = \frac{1-p}{p^2} = 2$，所以 $\mathrm{E}[N^2] = 6$，而 $\mathrm{E}[N^2] - \mathrm{E}[N] = 4$。）因此期望罰款為

$$\mathrm{E}[3N(N-1)] = 3 \times 4 = 12 \text{ 克朗}.$$

結論

在方案 (i)、(ii) 和 (iii) 之下，每名小販每天的期望罰款分別約為 9.3、15.9 和 12 克朗。由於受檢查的箱子數量極多，國王的總收入非常接近檢查次數乘以期望罰款。所以他應該選擇**方案 (ii)**。它的收入比方案 (i) 多大約 70%，比方案 (iii) 多約三分之一。

驗算

- 方案 (iii) 無法查表核對，但這個級數很容易逐項相加：$\frac{3\cdot2}{4} + \frac{3\cdot6}{8} + \frac{3\cdot12}{16} + \cdots = 1.5 + 2.25 + 2.25 + 1.875 + \cdots$。部分和（partial sum）很快就攀升趨近 12。
- 模擬 10^5 箱各有 625 條正態醃魚的箱子，並把三個方案都執行一遍，所得的平均罰款約為 10.2（來自 2×10^4 箱，所以誤差較大）、15.9 和 11.9 克朗。這些數值與 9.31、15.87 和 12 相當接近。

常見錯誤

- 把樣本平均值的標準差當作 $\frac{10}{625}$ 或 $\frac{100}{25}$。被 m 除的是*方差*，所以標準差是除以 $\sqrt{m}$。
- 把 N 當作由 0 開始（只數失敗的次數）。這裏 n 包括那條重的醃魚，所以 $\mathrm{P}(N = 1) = \frac{1}{2}$，而此時罰款為零。
- 比較被罰款的概率而不是比較期望罰款：方案 (iii) 有一半機會向小販罰款（即 $n \geq 2$ 時），但通常只罰 6 克朗。

STEP 之外

「數量極多，所以用期望值」這個理據就是大數定律；而 $\overline{W}$ 服從方差為 σ^2/m 的正態分佈這一事實，則與中心極限定理（central limit theorem）相伴而來，該定理令這個結論即使在個別重量並非正態分佈時仍然近似成立。謹慎的國王或許還會考慮離散程度：方案 (i)

是罕有但巨額的罰款，其方差遠比其他方案大。藉着對級數求導來求出 $\mathrm{E}[N(N-1)]$ 這類階乘矩（factorial moment），這個想法會引伸出概率生成函數（probability generating function），它是大學一年級概率論的核心工具。Grimmett 與 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）把這一切都講解得十分清楚。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。