詳細解答

# STEP II 樣本試卷，第 14 題

力學 • 剛體的轉動

> **STEP II 樣本試卷，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q14

## 關鍵思路

圓盤和質點都繞同一條固定的鉛垂軸轉動，所以最自然的工具是轉動的運動方程（rotational equation of motion）：力矩（torque）= 轉動慣量（moment of inertia）× 角加速度（angular acceleration），並分別應用於兩個物體。兩者之間的摩擦力是一對內力：它令其中一個加快多少（以角動量（angular momentum）計），就令另一個減慢多少。由此立即得出守恆的組合；再把兩條方程相減，便得到一條關於相對角速率的一階方程，而這個相對角速率按指數衰減（exponential decay）。

## 解答

### 模型

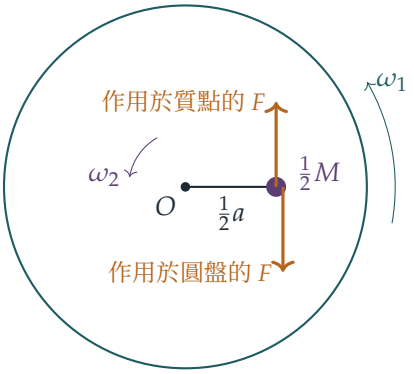
圓盤是一塊均勻薄片（uniform lamina），繞通過其中心 $O$ 的光滑固定軸轉動，所以它對該軸的轉動慣量為

$$I_1 = \tfrac{1}{2}Ma^2.$$

質點的質量為 $\frac{1}{2}M$，由一條輕而剛硬的金屬線固定在距離軸 $\frac{1}{2}a$ 之處，所以它沿半徑為 $\frac{1}{2}a$ 的圓運動，對該軸的轉動慣量為

$$I_2 = \tfrac{1}{2}M\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = \tfrac{1}{8}Ma^2.$$

起初 $\omega_1 = \Omega$ 而 $\omega_2 = 0$，所以在接觸點處圓盤比質點運動得快。因此摩擦力沿質點的運動方向作用於質點（沿切線方向，位於半徑 $\frac{1}{2}a$ 處），而根據牛頓第三定律（Newton's third law），在同一點上有一個大小相等、方向相反的力作用於圓盤。




（俯視圖；$F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$。金屬線的張力沿徑向，所以它對軸沒有力矩。）

**運動方程**

摩擦力 $F = Mak(\omega_1 - \omega_2)$ 作用於距離軸 $\frac{1}{2}a$ 之處，並與半徑垂直，所以它對軸的力矩為

$$F \cdot \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2).$$

質點的重量和各法向反作用力（normal reaction）都是鉛垂的，所以它們對鉛垂軸沒有力矩，而軸本身是光滑的。對圓盤而言，摩擦力阻礙轉動：

$$\tfrac{1}{2}Ma^2\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -\tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} = -k(\omega_1 - \omega_2).$$

對質點而言，摩擦力推動轉動：

$$\tfrac{1}{8}Ma^2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}Ma^2k(\omega_1 - \omega_2) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = 4k(\omega_1 - \omega_2).$$

（對質點，你同樣可以沿切線方向應用牛頓第二定律：$\frac{1}{2}M \cdot \frac{1}{2}a\,\dot{\omega}_2 = F$，這是同一條方程。）

**守恆的組合**

把第一條方程乘以 4，再加上第二條，

$$4\frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -4k(\omega_1 - \omega_2) + 4k(\omega_1 - \omega_2) = 0,$$

所以 $4\omega_1 + \omega_2$ 是常數。在 $t = 0$ 時它等於 $4\Omega + 0$，因此

$$4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega,$$

正如所求。這就是對該軸的角動量守恆（conservation of angular momentum）：$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = \frac{1}{8}Ma^2(4\omega_1 + \omega_2)$，而僅有的外力（軸上的反作用力、重力和鉛垂的反作用力）對該軸都沒有力矩。

**求解 $\omega_1$**

> **想一想** 我們有兩條耦合的方程。哪一個量能夠獨自滿足一條方程？

兩個變化率都只取決於差 $u = \omega_1 - \omega_2$，所以不妨考慮這個量。把兩條方程相減，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} = -ku - 4ku = -5ku,$$

其中 $u(0) = \Omega - 0 = \Omega$。分離變數（separating variables）（或認出這是指數衰減），

$$\omega_1 - \omega_2 = u = \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}.$$

把這條式子與 $4\omega_1 + \omega_2 = 4\Omega$ 相加，便消去 $\omega_2$：

$$5\omega_1 = 4\Omega + \Omega\,\mathrm{e}^{-5kt}, \qquad \text{所以} \qquad \omega_1 = \frac{\Omega}{5}\left(4 + \mathrm{e}^{-5kt}\right),$$

正如所求。由此可得 $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1 = \frac{4}{5}\Omega\left(1 - \mathrm{e}^{-5kt}\right)$。

另一個做法是把 $\omega_2 = 4\Omega - 4\omega_1$ 代入圓盤的方程，得到 $\dot{\omega}_1 = -5k\omega_1 + 4k\Omega$，這是一條線性方程，它滿足 $\omega_1(0) = \Omega$ 的解與上面相同。

## 驗算

- 在 $t = 0$ 時：$\omega_1 = \frac{1}{5}\Omega(4+1) = \Omega$ 而 $\omega_2 = 0$。正確。
- 當 $t \to \infty$ 時：$\omega_1, \omega_2 \to \frac{4}{5}\Omega$，兩者趨向同一速率，這正是摩擦力最終必然造成的結果。最終的動能（kinetic energy）為 $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}Ma^2\cdot\frac{16}{25}\Omega^2 = \frac{1}{5}Ma^2\Omega^2$，而最初為 $\frac{1}{4}Ma^2\Omega^2$，所以有五分之一的能量因摩擦而損失，這與「完全非彈性」（perfectly inelastic）耦合的預期相符。
- 數值上，取 $M = a = k = \Omega = 1$，把兩條運動方程逐步計算至 $t = 1$，得 $\omega_1 = 0.80135$ 和 $\omega_2 = 0.79461$，與 $\frac{1}{5}(4 + \mathrm{e}^{-5})$ 和 $\frac{4}{5}(1 - \mathrm{e}^{-5})$ 吻合，而 $4\omega_1 + \omega_2$ 自始至終保持為 4。

## 常見錯誤

- 把質點的轉動慣量當作 $\frac{1}{2}Ma^2$（彷彿它位於圓盤邊緣），而不是 $\frac{1}{2}M(\frac{1}{2}a)^2$。
- 在轉動方程中使用摩擦力本身，而不是它的力矩 $F\cdot\frac{1}{2}a$。
- 在兩條方程中給摩擦力相同的正負號：它令圓盤減慢，卻令質點加快。

## STEP 之外

這裏的摩擦力是內力，而 $4\omega_1 + \omega_2$ 的守恆正是碰撞中動量守恆的轉動版本；以指數方式趨向同一速率，與兩個物體以黏滯阻力（viscous drag）耦合的情況是同一套數學。更一般地說，線性系統（linear system）$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ 以 $A$ 的特徵向量（eigenvector）表示時便會解耦（decouple）：在這裏，特徵向量就是組合 $4\omega_1 + \omega_2$（特徵值（eigenvalue）為 0）和 $\omega_1 - \omega_2$（特徵值為 $-5k$）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）細緻地講述剛體轉動和角動量，而 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）則以特徵向量處理線性系統。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。