詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 13 題

力學 • 平衡與力矩

STEP II 樣本試卷，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s2-q13

關鍵思路

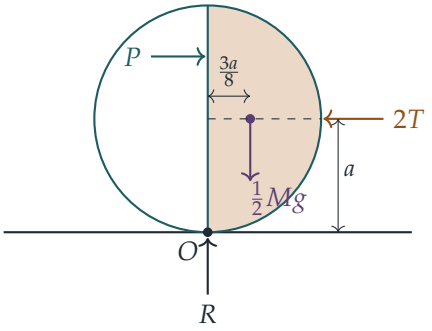
橙子若要散開，各瓣會向外翻倒，每一瓣都繞著球面與桌面接觸的那一點轉動。因此我們沿其中一個切面把橙子切成兩半，然後對其中一半，繞通過該最低點的一條水平線取力矩（moment）。這一半的重量要把它推倒；能把它拉住的只有絲帶，別無其他。另一半施加的力只會令情況更壞，「至少」二字正是由此而來。

解答

模型

我們把朱古力視為均勻的剛體（rigid body），把絲帶視為輕質、整圈張力（tension）同為 T，並假設各瓣大小相等、數目為偶數（真正的朱古力橙有二十瓣），於是有一個通過軸線的切面把橙子分成兩半，每一半都是半球形、夾角為 π 的楔形體。到最後我們會看到，只要切面光滑，這個論證對任何一組橙瓣都成立。

球面與桌面只在一點 O 接觸，即軸線的底端。以 O 為原點建立坐標軸，z 鉛垂向上，x 為水平方向，由軸線指向我們所研究的那一半（圖中右邊的一半）。分界平面是 $x = 0$。設 ℓ 為通過 O 且位於該平面內的水平線（即 y 軸）；我們繞 ℓ 取力矩，並規定若力矩傾向使這一半向外翻倒、遠離軸線，則該力矩為正。



其中一半所受的力

右邊的一半質量為 $\frac{1}{2}M$，它所受的外力如下。

- **重量** $\frac{1}{2}Mg$，作用於質心（centre of mass）。在題目給出的結果中代入 $2\theta = \pi$，可知質心與軸線的距離為
$$\frac{3\pi a \sin(\pi/2)}{16(\pi/2)} = \frac{3a}{8}$$
並位於 $x > 0$ 的一側。它繞 ℓ 的力矩為 $\frac{1}{2}Mg \cdot \frac{3a}{8} = \frac{3}{16}Mga$，屬翻倒方向。
- **桌面**：一個法向反作用力（normal reaction），另外可能有摩擦力（friction），全部作用於 O。由於 O 在 ℓ 上，這些力繞 ℓ 的力矩為零。
- **絲帶**，繞著這一半的赤道。窄絲帶沿法向壓在表面上，每單位長度的力為 T/a（情況就如一條繩繞過光滑曲面）。在角度由 $-\frac{\pi}{2}$ 至 $\frac{\pi}{2}$ 的弧上，各 x 分量之和為
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{T}{a} \cos\phi \, a \, \mathrm{d}\phi = 2T$$
方向指向軸線，而各 y 分量則因對稱而互相抵消。（另一個等價的看法：在絲帶穿過分界平面之處把它剪斷，每個斷口都以張力 T 沿 $-x$ 方向拉扯，同樣得出 $2T$。）這個力完全是水平的，作用於高度 a，所以它繞 ℓ 的力矩為 $2T \cdot a$，屬回復方向。
- **另一半**，作用於整個平面 $x = 0$ 上。這是唯一棘手的力，而我們無須知道它如何分佈。

> ? **想一想** 為甚麼另一半施加的力只會助長這一半翻倒？

把切面上每一小塊所受的力分解為垂直於切面的部分和沿切面的部分（若切面粗糙，後者就是摩擦力）。

- 垂直的部分沿 x 方向。兩半只是互相壓著，並沒有黏在一起，所以這部分是推力，沿 $+x$ 方向。它作用於某個高度 $z \geq 0$，所以它繞 ℓ 的力矩等於 z 乘以它的大小，永不為負：它傾向使這一半向外翻倒。

- 沿切面的部分位於平面 $x = 0$ 內，而這個平面也包含 ℓ。若一個力的作用線（line of action）與 ℓ 位於同一平面內，則作用線要麼與 ℓ 相交，要麼與它平行，所以這個力繞 ℓ 的力矩為零。

因此，無論接觸的細節如何，另一半所貢獻的總力矩 $P_{\text{mom}} \geq 0$，屬翻倒方向。

繞 ℓ 取力矩

這一半處於平衡（equilibrium），所以繞 ℓ 的總力矩為零：

$$2Ta = \tfrac{3}{16}Mga + P_{\text{mom}}.$$

由於 $P_{\text{mom}} \geq 0$，

$$2Ta \;\geq\; \tfrac{3}{16}Mga, \qquad \text{所以} \qquad T \;\geq\; \tfrac{3}{32}Mg,$$

這正是所要證明的結果。等號成立，當且僅當兩半之間完全沒有互相施壓，即兩半僅僅能夠維持在一起。

橙瓣數目不是偶數的情況

假如切面是光滑的，同樣的計算對任何由完整橙瓣組成、夾角為 2θ 的楔形體都適用。取 x 沿它的對稱平面，並取 ℓ 為通過 O 且垂直於該平面的水平線。楔形體的重量為 $\frac{\theta}{\pi}Mg$，作用於距離 $\frac{3\pi a\sin\theta}{16\theta}$ 處，產生的翻倒力矩為 $\frac{3}{16}Mga\sin\theta$。絲帶在它的弧上以 $2T\sin\theta$ 向內拉，作用於高度 a。光滑的切面只會產生垂直於切面的水平推力，而這些推力在 $+x$ 方向的分量不會是負數，所以它們同樣只會增加翻倒力矩。於是 $2Ta\sin\theta \geq \frac{3}{16}Mga\sin\theta$，約去 $\sin\theta$ 後再次得出 $T \geq \frac{3}{32}Mg$。無論我們選取哪一組橙瓣，所得的下界都相同。

驗算

- 題目給出的質心結果在 $2\theta = \pi$ 時給出 $\frac{3a}{8}$，正是大家熟悉的實心半球體質心與其平面的距離。以蒙地卡羅（Monte Carlo）方法估算，這一半的結果為 $0.376a$，而對其他楔形夾角，估算值亦與公式吻合。
- 以數值方法把絲帶在夾角為 2θ 的弧上的法向力加起來，得出 $2T\sin\theta$，例如對半個橙子就是 $2T$。
- 對每一個檢驗過的楔形夾角，所得的下界都同樣是 $\frac{3}{32}Mg \;\approx\; 0.094Mg$（$2\theta = 0.6,\ \pi,\ 2.4,\ 5$）。下界只取決於整個橙子，而與我們選擇怎樣切開它無關，這令人放心。
- 單位：力矩是力乘以長度，而 a 會約去，餘下的是一個力。

常見錯誤

- 繞球心或繞赤道上的一點取力矩。這樣一來，桌面施加的未知力，或另一半施加的未知力，就會進入方程。選取 O 點，正是因為桌面的力繞通過該點的直線沒有力矩。
- 說絲帶對這一半的力是 T。絲帶在這一半的弧的兩端都在拉，所以合力（resultant）是 $2T$。
- 沒有理據就把兩半之間的力設為零。那樣得出的只是等號成立的情況。「至少」二字，來自留意到這個力只能是推力。

STEP 之外

這是一道含有未知內力的靜力學（statics）題目，處理方法是先選取一條軸，消去我們無法求出的未知量，然後利用一個不等式（接觸力只會推，不會拉）來應付餘下的部分。分析磚石拱門和穹頂時，背後也是同一套推理：結構能夠屹立，當且僅當能找到一條始終留在材料內部的推力線。質心的結果本身是球極坐標（spherical polar coordinates）下一個標準的三重積分（triple integral），很值得親自推導一次。想進一步了解剛體平衡，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。