詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 12 題

力學 • 金屬線上的振動

STEP II 樣本試卷，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

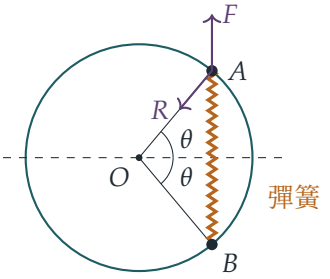
step.maths.org/questions/spec-s2-q12

關鍵思路

金屬線是光滑的，所以只有彈簧的力做功，機械能（mechanical energy）守恆。我們只需要用 θ 表示彈簧的長度（圓的一條弦（chord)），以及每顆珠子的速率。有兩件事要稍作思考。為甚麼平分角 AOB 的直線會保持固定？還有在第 (ii) 部分，如果珠子有足夠的能量到達直徑的兩端，會發生甚麼事？

解答

把珠子看成質點，它們套在水平面上的光滑圓形金屬線上，並由一條遵從胡克定律（Hooke's law）的輕彈簧連接。重力沿鉛垂方向，與金屬線反作用力（reaction）的鉛垂分量互相平衡，所以對水平方向的運動沒有影響。



圖中，F 是彈簧對 A 的推力（沿 BA 方向，因為彈簧起初處於壓縮狀態），R 是金屬線對 A 的反作用力的水平分量。

建立能量方程

用圓上的角度來量度每顆珠子的位置：A 位於角 ϕ_A，B 位於角 ϕ_B。

> **想一想** 為甚麼可以假設兩顆珠子以相同的速率運動，並且關於一條固定的直線對稱？

對通過 O 的鉛垂軸取力矩（moments）。彈簧作用於 A 和 B 的力大小相等、方向相反，並且沿同一條直線 AB 作用，所以它們的力矩互相抵銷。每個金屬線反作用力的水平分量 R 都垂直於金屬線，因此沿着通過 O 的半徑方向，沒有力矩。鉛垂方向的力對鉛垂軸沒有力矩。所以角動量（angular momentum）$ma^2(\dot\phi_A + \dot\phi_B)$ 守恆。由於珠子從靜止釋放，角動量起初為零，因此 $\phi_A + \phi_B$ 保持不變：角 AOB 的平分線是固定的。取它為圖中的虛線，使得 $\phi_A = \theta$ 及 $\phi_B = -\theta$。於是每顆珠子的速率都是 $a\dot\theta$。

彈簧就是弦 AB，長度為 $2a\sin\theta$。它的自然長度（natural length）是 $2a\sin\alpha$，所以伸長量（extension）是 $x = 2a(\sin\theta - \sin\alpha)$，而彈性勢能（elastic energy）是

$$\frac{\lambda x^2}{2\cdot 2a\sin\alpha} = \frac{4\lambda a^2(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{4a\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

這條公式在 $x < 0$（壓縮）時同樣成立，因為 x 取了平方。動能（kinetic energy）是 $2\cdot\frac12 m(a\dot\theta)^2 = ma^2\dot\theta^2$。金屬線是光滑的，它的反作用力始終垂直於運動方向，所以不做功，能量守恆。釋放時 $\theta = \beta$ 而 $\dot\theta = 0$，所以

$$ma^2\dot\theta^2 + \frac{\lambda a(\sin\theta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha} = \frac{\lambda a(\sin\beta-\sin\alpha)^2}{\sin\alpha}.$$

全式乘以 $\sin\alpha/a$，得

$$ma\dot\theta^2\sin\alpha + \lambda(\sin\theta-\sin\alpha)^2 = \lambda(\sin\beta-\sin\alpha)^2,$$

這正是所求的結果。注意彈簧起初處於壓縮狀態，所以 $\beta < \alpha$。

第 (i) 部分

把能量方程對 t 求導：

$$2ma\sin\alpha\,\dot\theta\ddot\theta + 2\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta\,\dot\theta = 0.$$

除以 $2\dot\theta$（只要珠子在運動，這一步就成立，而所得結果可憑連續性推廣至所有 t），得運動方程

$$ma\sin\alpha\,\ddot\theta = -\lambda(\sin\theta-\sin\alpha)\cos\theta.$$

平衡位置（equilibrium）在 $\theta = \alpha$，此時彈簧處於自然長度。如果 $\beta - \alpha$ 很小，則 θ 會一直接近 α（由能量方程可得 $|\sin\theta - \sin\alpha| \le |\sin\beta - \sin\alpha|$），所以可寫 $\theta = \alpha + \varepsilon$，其

中 ε 很小。準確至一階，$\sin\theta - \sin\alpha \approx \varepsilon\cos\alpha$，而 $\cos\theta \approx \cos\alpha$，後者所乘的量本身已經很小。所以

$$\ddot{\varepsilon} \approx -\frac{\lambda\cos^2\alpha}{ma\sin\alpha}\,\varepsilon,$$

這是簡諧運動（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \lambda\cos^2\alpha/(ma\sin\alpha)$。因此週期（period）是

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 2\pi\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda\cos^2\alpha}}.$$

第 (ii) 部分

設 $k = \sqrt{ma\sin\alpha/\lambda}$。由能量方程，

$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{k^2}\Big[(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2\Big].$$

珠子在 $\sin\theta - \sin\alpha = \pm(\sin\alpha - \sin\beta)$ 時停下，即當 $\sin\theta = \sin\beta$ 或 $\sin\theta = 2\sin\alpha - \sin\beta$ 時。由 $\theta = \beta$ 出發，θ 會增加（受壓縮的彈簧把兩顆珠子推開），而只要 $\sin\beta < \sin\theta < 2\sin\alpha - \sin\beta$，就有 $\dot{\theta}^2 > 0$。

想一想 是甚麼決定我們處於兩種情況中的哪一種？

關鍵在於 θ 能否在 $2\theta = \pi$ 之前到達第二個停止點；在該處 A 和 B 位於直徑的兩端，而 $\sin\theta$ 達到其最大值 1。這取決於 $2\sin\alpha - \sin\beta$ 是小於還是大於 1。

(a) $\sin\beta > 2\sin\alpha - 1$。這時 $2\sin\alpha - \sin\beta < 1$，所以存在銳角 γ 使得 $\sin\gamma = 2\sin\alpha - \sin\beta$，並且 $\gamma > \alpha$。珠子在 $\theta = \gamma$ 時停下（此時彈簧的伸長量與原來的壓縮量相同），而 θ 在 β 與 γ 之間振盪。去程和回程所需的時間相等，所以

$$T = 2\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_\beta^\gamma \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2}}, \qquad \gamma = \arcsin(2\sin\alpha - \sin\beta).$$

(b) $\sin\beta < 2\sin\alpha - 1$。這時 $2\sin\alpha - \sin\beta > 1 \geq \sin\theta$，所以當 θ 介乎 β 與 $\frac{1}{2}\pi$ 之間時，$\dot{\theta}$ 永不為零：珠子經過直徑兩端時仍在運動。此後弦再次縮短。能量方程只透過 $\sin\theta$ 與 θ 有關，而前者關於 $\frac{1}{2}\pi$ 對稱，所以由 $\frac{1}{2}\pi$ 到 $\pi - \beta$ 的運動，是由 β 到 $\frac{1}{2}\pi$ 的運動的鏡像。珠子在 $\theta = \pi - \beta$ 停下，此時彈簧再次被壓縮至原來的長度，然後把珠子沿原路推回去。（在 $\theta = \pi - \beta$ 時，運動方程給出 $\ddot{\theta} < 0$，因為 $\sin\theta - \sin\alpha < 0$ 而 $\cos\theta < 0$。）一次完整的振盪是 $\beta \to \pi - \beta \to \beta$，相當於把由 β 到 $\frac{1}{2}\pi$ 的四分之一段重複四次：

$$T = 4\sqrt{\frac{ma\sin\alpha}{\lambda}}\int_\beta^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - (\sin\theta - \sin\alpha)^2}}.$$

由於 $\sin\alpha < 1$，我們有 $2\sin\alpha - 1 < \sin\alpha$，所以兩種情況都與 $\beta < \alpha$ 相容。情況 (b) 只會在 $2\sin\alpha - 1 > 0$ 時出現，即當 $\frac{1}{6}\pi < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ 時。

驗算

- 在情況 (a) 中，代換 $\sin\theta = \sin\alpha - (\sin\alpha - \sin\beta)\cos u$ 把積分化為 $\int_0^{\pi} \mathrm{d}u/\cos\theta$。當 $\beta \to \alpha$ 時，它趨向 $\pi/\cos\alpha$，從而得回第 (i) 部分的週期。
- 我們以 $m = 1.3$、$a = 0.7$、$\lambda = 2.1$ 模擬了兩顆珠子在金屬線上各自獨立運動的情況。能量方程在捨入誤差範圍內成立，平分線亦保持固定。取 $\alpha = 0.6$、$\beta = 0.59$ 時，週期為 3.766，而第 (i) 部分給出 3.7657。取 $\alpha = 0.7$、$\beta = 0.4$（情況 (a)）時，週期為 4.8847，而積分給出 4.8846。取 $\alpha = 0.75$、$\beta = 0.1$（情況 (b)）時，週期為 7.0553，而積分給出 7.0553，並且 θ 一如所料在 $\pi - \beta$ 達到最大值。

常見錯誤

- 用 $\lambda x^2/(2a)$ 作為彈性勢能。分母應是自然長度的兩倍，即 $2 \cdot 2a\sin\alpha$。
- 在情況 (b) 中，把積分停在 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，或聲稱珠子在該處停下。珠子經過直徑兩端時速率不為零，所以週期是 $4\int_{\beta}^{\pi/2}$，而不是 $2\int_{\beta}^{\pi/2}$。

STEP 之外

第 (ii) 部分的週期積分無法以初等函數表示。它們與橢圓積分（elliptic integrals）屬同一家族，後者給出單擺（simple pendulum）的精確週期。留意第 (i) 部分的小幅振盪週期與振幅無關，而精確週期則不然。線性化振子與非線性振子之間的這種對比，是經典力學入門課程的核心主題之一。內力作用下的系統的角動量守恆，在本題中令平分線保持固定；Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）對此有嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。