詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 11 題

力學 • 拋體與碰撞

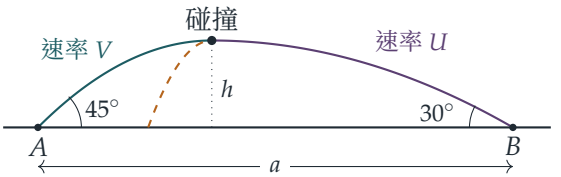
> **STEP II 樣本試卷，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q11

關鍵思路

「兩個質點相撞時各自位於最高點」其實包含了兩個條件：兩個質點（particle）必須用相同的時間到達最高點，而且那一刻必須位於同一位置。時間條件把 U 和 V 聯繫起來，而兩段水平距離之和就是 a。碰撞之後，最要緊的觀察是：兩個質點在最高點時都沿水平方向運動，所以合併後的質點起初完全沒有垂直速度。

解答

我們把兩個質點都當作只受重力作用（不計空氣阻力）的拋體（projectile），在包含 AB 的垂直平面內運動。水平方向取由 A 到 B 為正，垂直方向取向上為正。



證明 $U^2 = 2V^2$

由 A 拋出的質點，初速度的水平分量為 $\frac{V}{\sqrt{2}}$，垂直分量為 $\frac{V}{\sqrt{2}}$。由 B 拋出的質點，水平分量為 $\frac{\sqrt{3}}{2}U$（指向 A），垂直分量為 $\frac{1}{2}U$。

拋體的垂直速度為零時，它正位於最高點。若初始垂直速率為 w，這會在時間 w/g 發生。兩個質點在同一瞬間拋出，所以如果它們在碰撞的一刻都位於各自的最高點，這兩

個時間必須相等：

$$\frac{V}{\sqrt{2}\,g} = \frac{U}{2g} \quad\Longrightarrow\quad U = \sqrt{2}\,V \quad\Longrightarrow\quad U^2 = 2V^2,$$

正如所求。把這個共同的時間記為 $T = \dfrac{V}{\sqrt{2}\,g}$。

想一想 我們不是也應該檢查兩個最高點的高度是否相同嗎？

應該：時間相等是必要條件，但兩個質點還必須相遇。初始垂直速率為 w 的拋體會上升到高度 $w^2/(2g)$。對 A 的質點而言，這是 $\frac{V^2}{2}/2g = \frac{V^2}{4g}$；對 B 的質點而言，這是 $\frac{U^2}{4}/2g = \frac{2V^2}{8g} = \frac{V^2}{4g}$。兩者一致，所以只要 $U^2 = 2V^2$，高度便自動相同。（事實上這是必然的：兩者在同一時間 T 的垂直速度都是零，而且加速度相同，所以兩者的高度都是 $\frac{1}{2}gT^2$。）記

$$h = \frac{V^2}{4g}$$

為碰撞時的高度。

求 a

在時間 T，兩者的水平位置也必須一致。水平速度保持不變，所以在時間 T 內，由 A 拋出的質點向 B 移動了 $\frac{V}{\sqrt{2}}T$，由 B 拋出的質點向 A 移動了 $\frac{\sqrt{3}}{2}UT$。兩者相遇，所以這兩段距離之和為 a：

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{V}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}\,V\right)\frac{V}{\sqrt{2}\,g} \\ &= \frac{V^2}{g}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{V^2}{2g}(1+\sqrt{3}), \end{aligned}$$

這就是所求的結果。

碰撞之後

在碰撞的一瞬間，每個質點都位於自己的最高點，所以都沿水平方向運動：A 的質點速度為 $+\frac{V}{\sqrt{2}}$，B 的質點速度為 $-\frac{\sqrt{3}}{2}U = -\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}}$。

想一想 哪一個動量守恆？在哪個方向守恆？

在極短的碰撞過程中，唯一的巨大作用力是兩個質點之間大小相等、方向相反的力；重力大小有限，而且作用時間可以忽略。因此總動量（momentum）守恆。在水平方向，

設質量為 $2m$ 的合併質點的速度為 v，則

$$2m\,v = m\frac{V}{\sqrt{2}} - m\frac{\sqrt{3}\,V}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad v = -\frac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}.$$

負號表示合併質點朝 A 的方向往回運動，速率為 $\dfrac{(\sqrt{3}-1)V}{2\sqrt{2}}$。在垂直方向，兩個質點的垂直速度都是零，所以合併質點起初的垂直速度也是零。

合併質點現在是一個由高度 $h = \frac{V^2}{4g}$ 水平拋出的拋體。它的水平速度維持在 $|v|$。它到達平面時的垂直速率 w 可由 $w^2 = 0 + 2gh$ 求得：

$$w^2 = 2g\cdot\frac{V^2}{4g} = \frac{V^2}{2}, \qquad w = \frac{V}{\sqrt{2}}.$$

因此，速度與水平方向所成的角 ϕ 滿足

$$\begin{aligned}\tan\phi = \frac{w}{|v|} &= \frac{V}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-1)V} = \frac{2}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} = 1+\sqrt{3},\end{aligned}$$

其中第二行把分母有理化（rationalising the denominator）。至此全題完成。

驗算

- 單位。V^2/g 的單位是 $(\mathrm{m\,s^{-1}})^2/(\mathrm{m\,s^{-2}}) = \mathrm{m}$，正是距離應有的單位；而 $\tan\phi$ 是兩個速率之比，所以沒有量綱。留意 $\tan\phi$ 完全不取決於 V 或 g，這是個好兆頭。
- 幾何上是否合理。A 的質點到達最高點時，與 A 的水平距離為 $\frac{V^2}{2g}$；B 的質點到達最高點時，與 B 的水平距離為 $\sqrt{3}\,\frac{V^2}{2g}$。以較大速率、較平的 30° 角拋出的質點走得較遠，而兩段距離之和為 a。
- 數值。取 $V = 7.3\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ 和 $g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$，我們把兩條軌跡按時間逐步推算，發現在 $t = T$ 時兩者位於同一點 $(2.719, 1.359)$（以米為單位），而且兩者的垂直速度都是零。再把合併質點逐步推算至落到平面，得出 $\tan\phi \approx 2.73205$，與 $1+\sqrt{3} = 2.732050\ldots$ 吻合。

常見錯誤

- 在垂直方向應用動量守恆時，用了非零的垂直速度。在每條軌跡的最高點，垂直速度都是零，這正是這次碰撞如此簡單的原因。
- 把水平動量相加而不是相減：兩個質點正朝相反方向運動。
- 用了 $\tan\phi = |v|/w$（與垂直方向所成的角），而不是 $w/|v|$。

STEP 之外

質點合而為一，是完全非彈性碰撞（perfectly inelastic collision）最簡單的例子：動量守恆，但動能（kinetic energy）並不守恆（這裏損失了相當多，因為兩個質點原本朝相反方向運動）。到了大學，這會發展成在質心參考系（centre-of-mass frame）中研究碰撞：在這個參考系中總動量為零，而損失的能量就是相對於質心的全部動能。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）正是以這種方式處理動量和碰撞，並附有許多出色的習題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。