詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 10 題

純數學 • 邏輯謎題

> **STEP II 樣本試卷，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q10

關鍵思路

一切都建基於一個轉譯：說話者是蟾蜍，當且僅當他所說的話為真。因此，對每個角色我們都問「他可能是蟾蜍嗎？」和「他可能是青蛙嗎？」，然後剔除任何令其陳述的真值（truth value）出錯的選擇。尤其要留意那些關於說話者自己的陳述：其中有些是某一種生物根本不可能說出口的，而這通常就是突破口。

解答

在整個解答中，「蟾蜍」指說真話者，「青蛙」指說謊者，所以

$$\text{說話者是蟾蜍} \iff \text{其陳述為真.}$$

在每個場景中，我們找出所有符合這條規則的指派（assignment），並驗證恰好只有一個能夠成立。

第 (i) 部分

假設 A 是蟾蜍。那麼 A 的陳述為真，於是 A 便是青蛙，這是一個矛盾（contradiction）。因此 A 是青蛙。

所以 A 的陳述為假：A 和 B 並非都是青蛙。既然 A 是青蛙，這句話要不成立，唯一的可能就是 B 是蟾蜍。

驗算：若 A 是青蛙而 B 是蟾蜍，則「我們兩個都是青蛙」為假，正符合青蛙的陳述必須為假的要求。所以 A **是青蛙，**B **是蟾蜍**。

第 (ii) 部分

這是第 (i) 部分的鏡像。假設 C 是青蛙。那麼「D 和我之中至少有一個是青蛙」便為真（單憑 C 已足夠），但青蛙不可能說出真話。因此 C 是蟾蜍。

所以 C 的陳述為真：C、D 之中至少有一個是青蛙。既然 C 是蟾蜍，D 必定就是那隻青蛙。

驗算：若 C 是蟾蜍而 D 是青蛙，則該陳述為真，正符合蟾蜍的陳述必須為真的要求。所以 **C 是蟾蜍，D 是青蛙**。

第 (iii) 部分

以 S 表示 E 的陳述「G 和 H 都是蟾蜍」。那麼 G 斷言 S 為真，而 H 斷言 S 為假。

? **想一想** 我們對任何一個角色都還一無所知。到底可以從哪裏入手？

不要先看 E，而是把 G 和 H 放在一起看。他們兩個的陳述恰好相反，所以其中恰有一個為真。因此，不論 S 最終是真是假，G、H 之中恰有一個是蟾蜍，另一個是青蛙。

這就確定了 S 的真假：既然 G、H 之中有一個是青蛙，他們便不可能都是蟾蜍，所以 S 為假。於是：

- E 說的話為假，所以 E 是青蛙；
- G 聲稱 S 為真，而這是假的，所以 G 是青蛙；
- H 聲稱 S 為假，而這是真的，所以 H 是蟾蜍。

驗算：G 是青蛙，所以「G 和 H 都是蟾蜍」確實為假，與每一個結論都吻合。所以 **E 和 G 是青蛙，H 是蟾蜍**。

第 (iv) 部分

這裏的「我們」是指 I、J、K 三個。

I 是青蛙。假如 I 是蟾蜍，「我們全部都是青蛙」便為真，於是 I 是青蛙，矛盾。所以 I 是青蛙，而 I 的陳述為假：三個並非全是青蛙，故此

$$\text{在} J, K \text{ 之中至少有一個是蟾蜍.} \qquad (*)$$

J 是蟾蜍。反過來假設 J 是青蛙。那麼由 $(*)$ 可知 K 是蟾蜍，三者分別是 I 青蛙、J 青蛙、K 蟾蜍：恰好有一隻蟾蜍。這使 J 的陳述為真，而青蛙不可能說出真話。所以 J 是蟾蜍。

K 是青蛙。既然 J 是蟾蜍，J 的陳述便為真：三個之中恰好有一隻蟾蜍。那隻蟾蜍就是

J，所以 K 是青蛙。

想一想 現在知道 K 是青蛙，$(*)$ 還成立嗎？

成立：$(*)$ 只要求 J、K 之中有一個是蟾蜍，而 J 正是。所以完整的驗算如下：I 的「我們全部都是青蛙」為假（J 是蟾蜍），而 J 的「我們之中恰好有一個是蟾蜍」為真（只有 J）。兩個陳述的真值都正確，所以 I **和** K **是青蛙，** J **是蟾蜍**。

驗算

每個場景只有 2^2 或 2^3 種可能的指派，所以完整的驗算不過是一張簡短的真值表（truth table）：對每一種指派，檢驗是否每個說話者的陳述都恰好在該說話者是蟾蜍時為真。我們對全部四個場景都做了這樣的窮舉搜尋，每個場景中都恰好只有一種指派能夠成立，就是上面找到的那一種。（唯一性很重要：題目要求我們判定，所以我們必須排除其他指派，而不只是找出一個可行的。）

常見錯誤

- 找到一個沒有矛盾的指派就停下來。你還必須證明其他指派都不可行，而這正是那些「假設他是...」的反證所起的作用。
- 在第 (iii) 部分，把 G 的「這是真的」當作關於 G 自己的陳述，而不是關於 E 的說法的陳述。
- 在第 (iv) 部分，忘記了 K 雖然一言不發，卻仍然包括在「我們全部」和「我們之中恰好有一個」之內。

STEP 之外

這類謎題其實是命題邏輯（propositional logic）的練習：每隻生物是一個布爾變量（Boolean variable）t，每個陳述是一條公式 P，而每個說話者都施加了約束條件 $t \iff P$。判定這樣一組約束條件是否有解，就是可滿足性（satisfiability）問題，它是理論計算機科學的核心課題；而第 (i) 部分那句自我否定的陳述，則是說謊者悖論（liar paradox）的一位溫和的近親。斯穆里安（Raymond Smullyan）的 *What Is the Name of This Book?*（《這本書叫甚麼名字？》）是一本妙趣橫生的騎士與無賴（knights and knaves）謎題集，一步步引領讀者走向哥德爾（Gödel）的不完備定理（incompleteness theorem）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。