詳細解答

STEP II 樣本試卷，第 1 題

純數學 • 部分分式

> **STEP II 樣本試卷，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s2-q1

關鍵思路

在動用慣常的部分分式（partial fractions）那一套方法之前，先看看分子：它正正就是分母的導數（derivative）。由於分母可以分解為線性因式的乘積，f 是一個對數導數（logarithmic derivative），而乘積的對數導數等於各因式的對數導數之和。至於第二部分，方程變成三個單位分數（unit fractions）之和等於 1，單憑大小的考慮就足以迫使 x 非常小。

解答

部分分式

分母可以因式分解：

$$D(x) = x^3 + (a+b)x^2 + abx = x(x^2 + (a+b)x + ab) = x(x+a)(x+b),$$

求導後得

$$D'(x) = 3x^2 + 2(a+b)x + ab,$$

這恰好就是分子。所以 $\mathrm{f}(x) = D'(x)/D(x)$。

一般情況，$a \neq b$。三個因式 x、$x+a$、$x+b$ 互不相同（因為 $a \neq 0$、$b \neq 0$ 及 $a \neq b$），所以我們預期會有三個簡單的部分分式。利用積法則（product rule），

$$D'(x) = (x+a)(x+b) + x(x+b) + x(x+a),$$

再逐項除以 $D(x) = x(x+a)(x+b)$，得

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}} \qquad (a \neq b).$$

（等價地，$\mathrm{f}(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|x(x+a)(x+b)|$，而乘積的對數可拆成和。）當然，掩蓋法（cover-up rule）也會得出同樣的結果：在 $x=0$ 處留數（residue）為 $ab/(ab)=1$，在 $x=-a$ 處則為 $(3a^2-2a^2-2ab+ab)/((-a)(b-a)) = a(a-b)/(a(a-b)) = 1$，在 $x=-b$ 處亦同理。

想一想 當 $a=b$ 時，這個形式會出甚麼問題？

特殊情況，$a=b$。這時分母是 $x(x+a)^2$，帶有一個重複因式（repeated factor），所以標準形式應為 $\frac{A}{x}+\frac{B}{x+a}+\frac{C}{(x+a)^2}$。但分子同樣有因式 $x+a$：

$$3x^2+4ax+a^2 = (3x+a)(x+a),$$

所以它可以約去，剩下

$$\mathrm{f}(x) = \frac{3x+a}{x(x+a)} = \boxed{\frac{1}{x}+\frac{2}{x+a}} \qquad (a=b),$$

其中最後一步用了掩蓋法（$x=0$ 給出 $a/a=1$；$x=-a$ 給出 $-2a/(-a)=2$）。式中根本沒有 $(x+a)^{-2}$ 項，所以 $C=0$。這與把 b 換成 a 後的一般公式一致，但值得留意的是，重複因式是消失了，而不是產生一個平方項。

由於 a 和 b 均不為零，因式 x 永遠不會與 $x+a$ 或 $x+b$ 重合，所以只有以上這些情況。

當 $\mathrm{f}(x)=1$ 時

現在設 x、a、b 為正整數。在上述兩種情況中（$a=b$ 的公式不過是一般公式取 $b=a$），

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b},$$

而三項全為正數。因為 $a,b\geq 1$，後兩項各自嚴格小於 $\frac{1}{x}$。

想一想 如果三個各不超過 $\frac{1}{x}$ 的分數加起來等於 1，x 最大可以是多少？

- 若 $x=1$，則 $\mathrm{f}(x) = 1+(\text{正數}) > 1$。
- 若 $x\geq 4$，則 $\mathrm{f}(x) < \frac{3}{x} \leq \frac{3}{4} < 1$。
- 若 $x=3$，則 $x+a\geq 4$ 及 $x+b\geq 4$，所以 $\mathrm{f}(x)\leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{5}{6} < 1$。

所以 $\mathrm{f}(x)=1$ 迫使 $x=2$，這時我們需要

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b} = \frac{1}{2}.$$

兩邊乘以 $2(2+a)(2+b)$ 得 $2(2+b)+2(2+a) = (2+a)(2+b)$，即 $8+2a+2b = 4+2a+2b+ab$，所以

$$ab = 4.$$

由於 a、b 為正整數，僅有的可能是 $(a,b)=(1,4)$、$(2,2)$、$(4,1)$。因此 $\mathrm{f}(x)=1$ 恰好在以下情況成立：

$$(x,a,b)=(2,1,4),\quad (2,2,2),\quad (2,4,1),$$

這是有限個（三個）值，正如題目所求。注意 $(2,2,2)$ 屬於特殊情況 $a=b$：$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=1$。

驗算

這三個解就是我們熟悉的單位分數恆等式 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ 和 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$。數值方面，我們以精確的有理數運算，在 2000 個隨機有理點上把部分分式形式與原來的 f 作比較（$a\neq b$ 和 $a=b$ 兩種情況都有），另外對所有 $1\le x,a,b<200$ 作窮舉搜尋，結果恰好找到上述三組數，再無其他。

常見錯誤

- 在 $a=b$ 的情況中帶着 $\frac{C}{(x+a)^2}$ 項埋頭硬算，卻沒有留意到可以約分；你應該得出 $C=0$，而看出分子中的因式 $(x+a)$ 就可以省卻這番工夫。
- 忘記排除 $x=1$ 和 $x=3$；粗略的上界 $\mathrm{f}<3/x$ 只能處理 $x\ge 4$。
- 停在「$ab=4$」而沒有列出各個解，或者只列出 $(1,4)$ 而遺漏 $(4,1)$ 和 $(2,2)$。

STEP 之外

恆等式 $D'/D=\sum 1/(x-r_i)$（其中 r_i 是多項式 D 的根，重根按重數計算）用途極廣：它是關於根的冪和的牛頓恆等式（Newton's identities）的基礎，在複分析（complex analysis）中又是輻角原理（argument principle）的基礎；輻角原理藉着沿一條曲線對 f'/f 積分，數出函數在曲線內的零點數目。像 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ 這類求正整數解的方程屬於埃及分數（Egyptian fraction）問題，是丟番圖方程（Diophantine equations）中一個經典的角落，在那裏像我們這樣的估界論證就足以解決整個問題。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 對輻角原理有優美的幾何闡述，而 Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 則是入門丟番圖方程的好起點。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。