詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 9 題

純數學 • 絕對值不等式

> **STEP I 樣本試卷，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q9

關鍵思路

兩部分的重點都是去掉絕對值符號（modulus sign），方法是準確找出符號內的式子在哪裏變號，或在哪裏穿過某個水平。在 (i) 中，設 $u = x + 1$，式子便化為 $u - 2/u$，它在 $u = 0$ 的兩側各自遞增，因此不等式（inequality）只是在每一分支上把 u 限制在某個二次方程的兩個根之間。在 (ii) 中，把 $\cos x - \sin x$ 寫成單一個餘弦，便可看出它在哪裏變號，然後在該處把積分（integral）分段。

解答

第 (i) 部分

要使式子有定義，必須有 $x \neq -1$。設 $u = x + 1$，則 $u \neq 0$，且

$$x + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - 2}{x+1} = u - \frac{2}{u}.$$

把它記作 $f(u)$。不等式即為 $-2 < f(u) < 2$。

> **想一想** 為甚麼不直接把各項乘以 $x + 1$？

因為 $x + 1$ 可以是負數，而乘以負數會令不等號反向；不小心處理的話，正是丟失一半答案的典型原因。我們改為利用 f 的形狀。它的導數（derivative）是 $f'(u) = 1 + 2/u^2 > 0$，所以 f 在 $u < 0$ 上嚴格遞增（strictly increasing），在 $u > 0$ 上亦各自嚴格遞增。在每一分支上，它都由 $-\infty$ 升至 $+\infty$：當 $u \to 0^-$ 時，$-2/u \to +\infty$；當 $u \to 0^+$ 時，$-2/u \to -\infty$；而當 $|u| \to \infty$ 時，$f(u) \sim u$。因此在每一分支上，f 取 -2 和 2 這兩個值各恰好一次，而 $-2 < f < 2$ 正好在這兩點之間成立。

對於 $u \neq 0$，乘以 u 可得兩個等價的方程：

$$f(u) = 2 \iff u^2 - 2u - 2 = 0 \iff u = 1 \pm \sqrt{3},$$
$$f(u) = -2 \iff u^2 + 2u - 2 = 0 \iff u = -1 \pm \sqrt{3}.$$

分支 $u > 0$。正根是 $u = -1 + \sqrt{3}$（此處 $f = -2$）和 $u = 1 + \sqrt{3}$（此處 $f = 2$）。由於 f 遞增，$-2 < f(u) < 2$ 恰好在 $-1 + \sqrt{3} < u < 1 + \sqrt{3}$ 時成立，即 $-2 + \sqrt{3} < x < \sqrt{3}$。

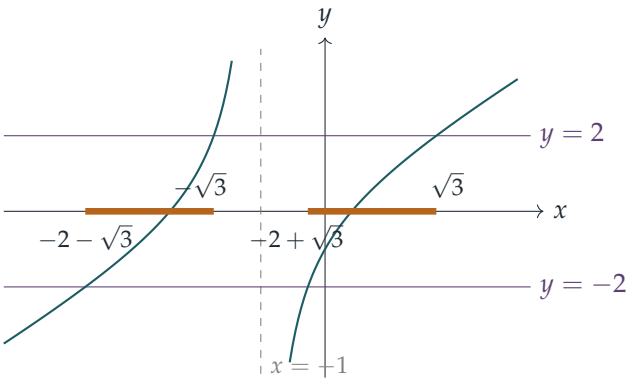
分支 $u < 0$。負根是 $u = -1 - \sqrt{3}$（此處 $f = -2$）和 $u = 1 - \sqrt{3}$（此處 $f = 2$）。同樣由單調性（monotonicity）可知，$-2 < f(u) < 2$ 恰好在 $-1 - \sqrt{3} < u < 1 - \sqrt{3}$ 時成立，即 $-2 - \sqrt{3} < x < -\sqrt{3}$。

兩個區間都不包含 $x = -1$（留意 $-\sqrt{3} < -1 < -2 + \sqrt{3}$），所以解集（solution set）是

$$\boxed{(-2 - \sqrt{3},\ -\sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3},\ \sqrt{3})}$$

每個端點都符合題目要求的 $a + b\sqrt{3}$ 形式。端點不包括在內，因為在該處絕對值恰好等於 2。

把 $y = x + (x-1)/(x+1)$ 的圖像與直線 $y = \pm 2$ 畫在一起，可見曲線位於兩條直線之間的兩個區間（以琥珀色標示）。



第 (ii) 部分

把兩項合併成一個餘弦：

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

當 $0 \le x \le \pi$ 時，有 $\pi/4 \le x + \pi/4 \le 5\pi/4$，而餘弦在 $[\pi/4, \pi/2)$ 上為正，在 $(\pi/2, 5\pi/4]$ 上為負。因此當 $0 \le x \le \pi/4$ 時 $\cos x - \sin x \ge 0$，當 $\pi/4 \le x \le \pi$ 時則 ≤ 0。在 $\pi/4$ 處把積分分段，並利用 $\cos x - \sin x$ 的一個原函數（antiderivative）是

$\sin x + \cos x$：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\cos x - \sin x|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x - \int_{\pi/4}^{\pi} (\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x \\ &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} - \Big[\sin x + \cos x\Big]_{\pi/4}^{\pi} \\ &= \left(\sqrt{2} - 1\right) - \left(-1 - \sqrt{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

驗算

- 在 (i) 中抽查數值：當 $x = 0$ 時，式子的值是 -1，在絕對值的界限之內，而 $0 \in (-2+\sqrt{3}, \sqrt{3})$；當 $x = -2$ 時，值是 $-2+3 = 1$，而 $-2 \in (-2-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$；當 $x = -1.5$ 時，值是 $-1.5+5 = 3.5$，在界限之外，而 $-1.5 \in (-\sqrt{3}, -1)$ 確實不在任何一個區間內。
- 在一個細密的網格上，以及在 $[-50, 50]$ 內的 2×10^5 個隨機點上測試不等式，結果處處與這兩個區間吻合，而在全部四個端點上，絕對值都等於 2。
- 在 (ii) 中，辛普森法則（Simpson's rule）給出 $2.828427\ldots$，與 $2\sqrt{2} \approx 2.828427$ 相符；兩段的值分別是 $\sqrt{2} - 1 \approx 0.4142$ 和 $\sqrt{2} + 1 \approx 2.4142$。作為合理性檢查，被積函數（integrand）最大為 $\sqrt{2}$，所以積分最大為 $\sqrt{2}\,\pi \approx 4.44$。

常見錯誤

- 把 $x + \frac{x-1}{x+1} < 2$ 的兩邊乘以 $x+1$ 而沒有考慮其正負，結果丟失了（或錯誤地包括了）$x = -1$ 左邊的區間。
- 只解 $f < 2$，或只解 $f > -2$：絕對值不等式要求兩者同時成立。
- 在 (ii) 中，直接在整個 $[0, \pi]$ 上對 $\cos x - \sin x$ 積分，得出 -2（絕對值的積分得出負數，是一個警號）。

STEP 之外

(i) 的竅門，是把一個代數不等式換成關於單調函數（monotonic function）的陳述：若 f 在某區間上嚴格遞增，則 $a < f(u) < b$ 恰好在 $f = a$ 與 $f = b$ 的兩點之間成立。要嚴格證明這一點，需要用到介值定理（intermediate value theorem），它是大學分析課程中最早出現的重要結果之一；而帶絕對值的不等式，例如 $|x - a| < \varepsilon$，正是該課程的日常語言。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析學入門書）親切易讀，兩者都可以

在書中見到。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。