詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 8 題

純數學 • 積分方程

STEP I 樣本試卷，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

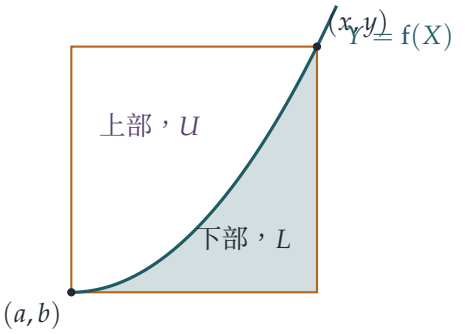
step.maths.org/questions/spec-s1-q8

關鍵思路

面積條件對 (x, y) 的每一個位置都成立，所以它其實是兩個以 x 為自變數的函數之間的等式：一邊是 f 的積分，另一邊則涉及 $\mathrm{f}(x)$ 本身。對 x 求導便可消去積分，得出一個一階微分方程（first-order differential equation），這個方程可以分離變數（或者更簡潔地，化為「某個商的導數等於零」）。

解答

由於 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$，曲線由矩形的一角 (a, b) 上升至對角 (x, y)，所以矩形的闊度為 $x - a$，高度為 $y - b = \mathrm{f}(x) - b \geq 0$。下部是曲線與底邊 $Y = b$ 之間的區域（下圖陰影部分）；上部則是餘下的部分。



以 t 作為積分變數（因為 x 現在是積分上限），

$$L = \int_a^x (\mathrm{f}(t) - b)\,\mathrm{d}t, \qquad L + U = (x - a)(\mathrm{f}(x) - b).$$

條件 $L = \frac{1}{2}U$ 即是 $U = 2L$，所以整個矩形的面積為 $3L$：

$$3\int_a^x (\mathrm{f}(t) - b)\,\mathrm{d}t = (x-a)(\mathrm{f}(x) - b) \qquad \text{對所有} x \geq a. \tag{$*$}$$

想一想 怎樣由一條含有積分的等式，得出一條可以解出 f 的方程？

由於 $(*)$ 對每一個 $x \geq a$ 都成立，兩邊是同一個以 x 為自變數的函數，所以它們的導數相等。函數 f 可微（differentiable）（題目提到 f′），因而連續（continuous），所以根據微積分基本定理（fundamental theorem of calculus），左邊的導數是 $3(\mathrm{f}(x) - b)$。用積法則（product rule）對右邊求導，

$$3(\mathrm{f}(x) - b) = (\mathrm{f}(x) - b) + (x-a)\,\mathrm{f}'(x),$$

即

$$(x-a)\,\mathrm{f}'(x) = 2(\mathrm{f}(x) - b).$$

為了整理這條式，設 $g(x) = \mathrm{f}(x) - b$ 及 $u = x - a$，於是 $g' = \mathrm{f}'$，方程變成 $u\,g' = 2g$。我們可以分離變數（separate variables），得 $g'/g = 2/u$，但這樣要除以 g，而它有可能等於零。更乾淨利落的做法是留意到，當 $x > a$（即 $u > 0$）時，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g}{u^2}\right) = \frac{u^2 g' - 2u\,g}{u^4} = \frac{u\,g' - 2g}{u^3} = 0.$$

所以 g/u^2 是一個常數，設為 k，在 $x > a$ 上成立，於是

$$\mathrm{f}(x) - b = k(x-a)^2 \qquad (x > a),$$

而這在 $x = a$ 時同樣成立，因為 (a, b) 在曲線上。由於 $\mathrm{f}(x) \geq b$ 對 $x \geq a$ 成立（函數由 $\mathrm{f}(a) = b$ 開始非遞減），我們有 $k \geq 0$，而且 $k > 0$，除非曲線是水平直線 $y = b$；在這情況下每個矩形都退化成面積為零，條件變得空洞。

因此曲線是 $y - b = k(x-a)^2$，其中 $x \geq a$：這是以 $x = a$ 為鉛垂對稱軸、頂點（vertex）位於 (a, b) 的拋物線（parabola）的一半。由於 $x \geq a$，我們只得到右邊的一支，所以它是該拋物線的一段弧，正如題目所要求。

反過來，這條曲線確實滿足條件：$L = \int_a^x k(t-a)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}k(x-a)^3$，而矩形的面積為 $(x-a)\cdot k(x-a)^2 = k(x-a)^3$，所以 $U = \frac{2}{3}k(x-a)^3 = 2L$。

驗算

取 $a = b = 0$、$k = 1$ 及 $x = 3$：矩形為 3×9，面積為 27，而 $\int_0^3 t^2\,\mathrm{d}t = 9$，所以兩部分的面積分別為 9 和 18，比為 $1:2$。更一般地，對於 $y - b = k(x-a)^p$，下部與上部之比為 $1/p$（我們用辛普森法則（Simpson's rule）對 $p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3$ 作了數值驗算），所以比值 $\frac{1}{2}$ 正好對應 $p = 2$；直線（$p = 1$）把矩形平分，理應如此。

常見錯誤

- 把 x 同時用作積分上限和積分變數，令求導一步變得混亂。
- 把兩部分調轉，得出 $U = \frac{1}{2}L$，結果得到 $(x-a)\mathrm{f}' = \frac{1}{2}(\mathrm{f}-b)$ 及曲線 $y - b = k\sqrt{x-a}$，那是一條對稱軸為水平的拋物線，方向不對。
- 不加說明便除以 $\mathrm{f}(x) - b$；上面利用商的論證避開了這個問題。

STEP 之外

方程 $(*)$ 是一條*積分方程*（integral equation）：未知函數出現在積分之內。透過求導把它化為微分方程，並記住原來的方程同時決定了初始值（initial value），是標準的第一步；而答案的唯一性，則建基於這個事實：在一個區間上導數為零的函數必為常數（這是中值定理（mean value theorem）的推論）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 嚴謹地證明了微積分基本定理和中值定理；Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations* 則涵蓋了像 $u\,g' = 2g$ 這類方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。