詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 7 題

純數學 • 複指數級數

> **STEP I 樣本試卷，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q7

關鍵思路

每當見到 $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，就抽出「半角」因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$：餘下的是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$，它是實數。至於那個級數，二項式係數（binomial coefficients）$\frac{n!}{r!(n-r)!}=\binom{n}{r}$ 提示我們使用二項式定理（binomial theorem）。因此我們把每個正弦寫成一個指數的虛部（imaginary part），於是該和就變成 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ 的某次冪的虛部，而第一部分已經把它化成極式（polar form）。

解答

模與輻角

抽出因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，

$$\begin{aligned}1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}[(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)+(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)]\\ &= 2\cos\alpha\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.\end{aligned}$$

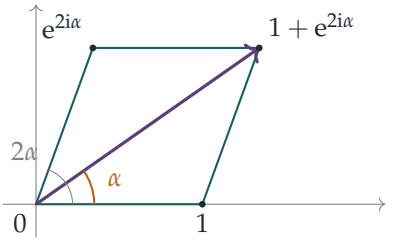
想一想 我們現在可以直接讀出「模（modulus）為 $2\cos\alpha$，輻角（argument）為 α」嗎？對 α 的限制有甚麼用？

$r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 這個形式，只有在 $r>0$ 時才給出模 r 和輻角 θ。這裏 $-\frac{1}{2}\pi<\alpha<\frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos\alpha>0$，而且這個範圍也落在主值區間 $(-\pi,\pi]$ 之內。因此

$$|1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}|=2\cos\alpha,\qquad \arg(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})=\alpha.$$

（假如 $\cos\alpha$ 是負數，模就會是 $-2\cos\alpha$，而輻角則會相差 π。）

這裏還有一個漂亮的幾何圖像。點 0、1 和 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ 構成一個邊長為 1 的菱形，餘下的一個頂點是 $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$。由 0 出發的對角線平分角 2α，長度為 $2\cos\alpha$。



級數

由於對實數 θ 有 $\sin\theta = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，而二項式係數都是實數，

$$\begin{aligned} S &= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\sin(2r+1)\alpha = \operatorname{Im}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} \\ &= \operatorname{Im}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^r\Big] = \operatorname{Im}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^n\Big], \end{aligned}$$

其中先用了 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2r+1)\alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^r$，再用二項式定理。現在利用第一部分的結果，配合棣美弗定理（de Moivre's theorem）$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}$：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\,2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} = 2^n\cos^n\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}.$$

因為 $2^n\cos^n\alpha$ 是實數，取虛部便得

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\sin(2r+1)\alpha = 2^n\cos^n\alpha\,\sin(n+1)\alpha.}$$

因式分解 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} = 2\cos\alpha\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ 對每一個實數 α 都成立。我們只是在指明模和輻角時才需要 $\cos\alpha > 0$，所以這條求和公式對所有實數 α 都成立，而不限於題目所給的範圍。

驗算

- $n=0$：兩邊都是 $\sin\alpha$。$n=1$：根據和化積公式（sum-to-product formula），左邊是 $\sin\alpha+\sin 3\alpha = 2\sin 2\alpha\cos\alpha$，與 $2\cos\alpha\sin 2\alpha$ 吻合。
- $n=3$，$\alpha=\frac{\pi}{6}$：左邊是 $\frac{1}{2}+3+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$，右邊是 $8\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)^3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{2}$。
- $\alpha=\frac{1}{2}\pi$：每一項 $\sin(2r+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^r$，所以當 $n\geq 1$ 時，和為 $(1-1)^n=0$，與 $\cos\frac{\pi}{2}=0$ 吻合。
- 我們以數值方法驗證過，對 $0\leq n\leq 24$ 及隨機選取的 α 值，公式都成立。

常見錯誤

- 把模寫成 $2\cos\alpha$，卻沒有指出 α 的範圍保證它是正數。模不可能是負數。
- 過早取虛部。$\operatorname{Im}(zw) \neq \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w$，所以要一直保留複數形式，到最後一步才取虛部。
- 把 $e^{i(2r+1)\alpha}$ 寫成 $\left(e^{2i\alpha}\right)^r$，漏掉了額外的因子 $e^{i\alpha}$。這樣會令 $\sin(n+1)\alpha$ 變成 $\sin n\alpha$。

STEP 之外

同一個想法，即把 $\sum \binom{n}{r} e^{ir\theta}$ 求和成閉合形式（closed form），也出現在傅立葉分析（Fourier analysis）之中。在那裏，$\cos^n$ 類型的式子會展開成倍角之和，或由倍角之和收攏而成，而二項式權重 $\binom{n}{r}/2^n$ 就成為二項分佈（binomial distribution）。抽出半角因子也是求 $1 - e^{i\theta}$ 的模的標準方法，你會在等比級數（geometric series）和單位根（roots of unity）中遇到它。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把這些運算的幾何觀點闡述得十分精彩，當中也包括那幅菱形圖。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。