詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 6 題

純數學 • 弓形的面積

> **STEP I 樣本試卷，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q6

關鍵思路

這枚硬幣是一個正七邊形（regular heptagon），每條邊外面各凸出一個圓弧形的「帽子」。因此它的面積等於七邊形的面積加上七個弓形（circular segment）的面積，而每個弓形就是一個扇形（sector）減去一個三角形。於是整個問題歸結為兩個角：每段弧在其圓心所對的角（用圓周角定理（inscribed angle theorem）立刻可得），以及七邊形的長對角線與其外接圓（circumcircle）半徑之間的夾角。

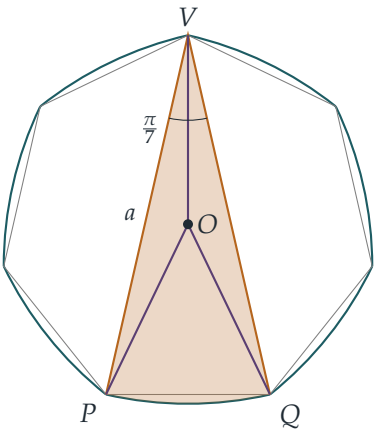
解答

形狀

每個頂點（vertex）與它對面那段弧的兩個端點的距離都是 a（兩個端點都在以該頂點為圓心、半徑為 a 的圓上）。所以七條「長」對角線（diagonal），即每條由一個頂點連到沿周界數過去第三個頂點的線段，長度全是 a。半徑相等的等弧在各自圓心所對的角相等，所以七條邊（即各段弧的弦（chord））也都相等。

把長對角線依次連起來，便得到一個各邊長度均為 a 的七角星。它在每個尖角處的角，就是由該頂點出發的兩條對角線之間的夾角；而這兩條對角線連同對面的那條邊，組成一個三角形，三邊分別是 a、a 和共同的邊長。這樣的七個三角形全部全等（congruent），所以這個星形不但等邊，而且等角，因而是正星形。由此可知，七個頂點就是一個正七邊形的頂點，設其中心為 O，外接圓半徑（circumradius）為 R。

把其中一個頂點記為 V，並設 P 和 Q 是以 V 為圓心的那段弧的兩個端點；P 和 Q 是七邊形的相鄰頂點。



每段弧所對的角

邊 PQ 在中心 O 所對的角是 $2\pi/7$。由於 V 在外接圓上，並且位於優弧（major arc）PQ 上，由圓周角定理得

$$\angle PVQ = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{7}.$$

所以每段弧都是半徑為 a 的圓的一部分，在其圓心所對的角為 $\pi/7$，而扇形 VPQ（陰影部分）的面積是

$$\tfrac{1}{2}a^2\cdot\frac{\pi}{7} = \frac{\pi a^2}{14}.$$

把面積加起來

硬幣的幣面由七邊形和七個弓形組成，每條邊上各有一個弓形。七邊形可分成七個像 OPQ 那樣的三角形，而 PQ 上的弓形就是扇形 VPQ 減去三角形 VPQ。因此

$$\begin{aligned}\text{面積} &= 7\,[OPQ] + 7\big(\text{扇形}VPQ - [VPQ]\big)\\ &= \frac{\pi a^2}{2} - 7\big([VPQ] - [OPQ]\big),\end{aligned}$$

其中 $[\,\cdot\,]$ 表示面積。

? **想一想** 怎樣才能不必分別計算兩個三角形，就求出 $[VPQ] - [OPQ]$？

中心 O 位於三角形 VPQ 之內，並在它的對稱軸上，所以從三角形 VPQ 中除去三角形 OPQ，餘下的就是兩個全等三角形 OVP 和 OVQ：

$$[VPQ] - [OPQ] = [OVP] + [OVQ] = 2\cdot\tfrac{1}{2}\,R\,a\sin\angle OVP.$$

根據對稱性，VO 平分 $\angle PVQ$，所以 $\angle OVP = \pi/14$。三角形 OVP 是等腰三角形（isosceles triangle），其中 $OV = OP = R$，所以兩個底角都是 $\pi/14$；由 O 向 VP 作垂

線，便得

$$a = VP = 2R\cos\frac{\pi}{14}, \qquad \text{所以} \qquad R = \frac{a}{2\cos(\pi/14)}.$$

因此

$$[VPQ] - [OPQ] = R\,a\sin\frac{\pi}{14} = \frac{a^2\sin(\pi/14)}{2\cos(\pi/14)} = \frac{a^2}{2}\tan\frac{\pi}{14},$$

而

$$\text{面積} = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{7a^2}{2}\tan\frac{\pi}{14} = \frac{a^2}{2}\left(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}\right),$$

這正是所要證明的結果。

驗算

- 數值上，$\frac{1}{2}(\pi - 7\tan\frac{\pi}{14}) \approx 0.7719$，所以面積約為 $0.772a^2$。在七段弧上密集取點，再用鞋帶公式（shoelace formula）計算，結果吻合至小數點後六位；用蒙地卡羅（Monte Carlo）方法估算，結果也一樣（一個點在硬幣之內，當且僅當它與全部七個頂點的距離都不超過 a）。
- 這枚硬幣在每個方向上的寬度都是 a，就像一個直徑為 a 的圓盤，而圓盤的面積是 $\pi a^2/4 \approx 0.785a^2$。在所有定寬為 a 的圖形之中，以圓盤的面積最大，所以我們預期答案會略小一些，而 $0.772a^2 < 0.785a^2$，正合預期。
- 把同樣的論證用於勒洛（Reuleaux）n 邊形（n 為奇數），可得 $\frac{a^2}{2}\left(\pi - n\tan\frac{\pi}{2n}\right)$；當 $n \to \infty$ 時，$n\tan\frac{\pi}{2n} \to \frac{\pi}{2}$，面積趨向 $\pi a^2/4$，即圓盤的面積。取 $n = 3$ 則得 $\frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})a^2$，就是大家熟悉的勒洛三角形（Reuleaux triangle）。

常見錯誤

- 把弧所對的角當作 $2\pi/7$（在中心 O 所對的角），而不是 $\pi/7$（在對面頂點所對的角，那裏才是該段弧真正的圓心）。
- 把 a 與外接圓半徑 R 混淆：a 是長對角線，$a = 2R\cos(\pi/14)$。

STEP 之外

50 便士硬幣是一條定寬曲線（curve of constant width）：每一對互相平行的切線之間的距離都同樣是 a，所以無論硬幣怎樣轉動，投幣口都能用同一方法量度它。巴比爾定理（Barbier's theorem）指出，每一條這樣的曲線的周界都是 πa（這裏是 $7\cdot a\cdot \pi/7$），而布拉施克–勒貝格定理（Blaschke–Lebesgue theorem）則指出，其中以勒洛三角形的面積

最小。想進一步了解這類幾何，可參閱柯朗（Courant）與羅賓斯（Robbins）的 *What Is Mathematics?*，書中有一節談定寬曲線，寫得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。