詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 5 題

純數學 • 數字計數與階乘

> **STEP I 樣本試卷，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q5

關鍵思路

兩部分考的都是仔細點算，而不是計算。在 (i) 中，先把數字按區段點算（一位數、兩位數、三位數），準確找出第 1000 個數字（digit）落在哪裏，然後逐個數位點算 7 的數目：個位、十位、百位。在 (ii) 中，每個末尾零（trailing zero）都對應一個因數 $10 = 2 \times 5$，而 5 比 2 稀少，所以只需點算 365! 中因數 5 的個數。

解答

第 (i) 部分

在哪裏停筆？數 1 至 9 用了 9 個數字。90 個兩位數 10 至 99 用了 180 個數字，至此合共 189 個。於是還剩下

$$1000 - 189 = 811 = 3 \times 270 + 1$$

個數字。首 270 個三位數是 $100, 101, \ldots, 369$，它們用了 810 個數字。最後一個數字是 370 的首位數字，即 3。所以我們完整寫出了 $1, 2, \ldots, 369$，之後再寫了單獨一個 3。

> ? **想一想** 370 這個數裏面有一個 7。它算不算在內？

不算。我們寫完它的首位數字 3 便停筆，所以它的 7 根本沒有寫出來。這正是我們必須把停筆的位置準確定到某一個數字的原因。

點算 1 至 369 中的 7。我們按位值（place value）點算。每個 7 都恰好在一個數位上，所以不會重複點算；像 77 這樣的數會貢獻兩個，這是正確的。

- 個位數字。在每個完整的十個數區段 $10k, \ldots, 10k + 9$ 中，恰好有一個數以 7 結尾。0

至 359 這些數組成 36 個完整區段，給出 36 個 7：7, 17, . . . , 357。不完整的區段 360 至 369 再多添一個，即 367。合計：37。

- 十位數字。在每個完整的一百個數之中，恰好有十個數的十位數字是 7：即 70–79、170–179 和 270–279。區段 370–379 已超出 369。合計：30。
- 百位數字。不超過 369 的每個數，百位數字最大是 3（或者根本沒有百位數字）。合計：0。

最後那個單獨的 3 沒有任何貢獻。因此數字 7 共用了

$$37 + 30 + 0 = 67 \text{ 次。}$$

第 (ii) 部分

N 在十進制（base 10）下末尾零的個數，是滿足 $10^k \mid N$ 的最大的 k。由於 $10 = 2 \times 5$，這個數等於 N 的質因數分解（prime factorisation）中 2 的冪次與 5 的冪次兩者中較小的一個。

點算 5 的個數。整除 365! 的 5 的冪次，等於對 $j = 1, \ldots, 365$ 把 j 中因數 5 的個數加起來的總和。5 的倍數至少貢獻一個因數，25 的倍數貢獻第二個，125 的倍數貢獻第三個，如此類推。逐層分開點算：

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \tfrac{365}{5} \right\rfloor &= 73 && \text{（5 的倍數），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{25} \right\rfloor &= 14 && \text{（25 的倍數），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{125} \right\rfloor &= 2 && \text{（125 的倍數：125, 250），} \\
\left\lfloor \tfrac{365}{625} \right\rfloor &= 0. &&
\end{aligned}$$

一個恰好被 5^m 整除的數，在首 m 行中各被點算一次，所以它的貢獻恰好是 m，正合所需。因此 365! 中 5 的冪次是

$$73 + 14 + 2 = 89.$$

2 並不是瓶頸。對 2 作同樣的論證，可知因數 2 至少有 $\lfloor 365/2 \rfloor = 182 > 89$ 個。（事實上共有 $182 + 91 + 45 + 22 + 11 + 5 + 2 + 1 = 359$ 個。）所以 $2^{89} \cdot 5^{89} = 10^{89}$ 整除 365!，但 10^{90} 不能，因為 $5^{90} \nmid 365!$。

因此 365! 的末尾恰好有 **89** 個零。

驗算

對於 (i)，可以快速檢查停筆的位置：$9 + 180 + 3 \times 270 = 999$ 個數字剛好寫到 369 的末尾，而下一個數字就是 370 的首位數字 3。用電腦寫出首 1000 個數字再點算，可確

認共有 67 個 7，其中 20 個在 1–99 之中，47 個在 100–369 之中。對於 (ii)，準確計算 365!（它有 779 位數字），再點算它末尾的零。結果是 89 個，與 5 的個數吻合。可以用一個小例子親手檢驗這個方法：25! 的末尾應有 $\lfloor 25/5 \rfloor + \lfloor 25/25 \rfloor = 6$ 個零，而事實上 $25! = 15\,511\,210\,043\,330\,985\,984\,000\,000$。

常見錯誤

- 把 370（甚至 371–379）當作已經寫出來，於是得出 68 或更大的答案。
- 只用 $\lfloor 365/5 \rfloor = 73$，忘記了 25、50、... 含有兩個 5，而 125、250 含有三個 5。
- 按數而不是按數字來點算 7，以致 77、177 和 277 只點算了一次而不是兩次。

STEP 之外

(ii) 中的逐層點算就是勒讓德公式（Legendre's formula）：質數 p 在 $n!$ 中的冪次是 $\sum_{k\geq 1}\lfloor n/p^k \rfloor$，它亦等於 $(n - s_p(n))/(p-1)$，其中 $s_p(n)$ 是 n 在 p 進制下各位數字之和。這裏 $365 = 2430_5$，數字和是 9，而 $(365-9)/4 = 89$。這條公式是庫默爾定理（Kummer's theorem）的基礎，該定理討論二項式係數（binomial coefficients）的質因數。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算術》）是進一步探索這類初等數論（elementary number theory）的好去處。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。