詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 4 題

純數學 • 代換積分法

> **STEP I 樣本試卷，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q4

關鍵思路

每當見到二次式的平方根，應先配方（complete the square）。這裏根號內的二次式化為 $(x+1)^2-3$，而根號外的因子亦是 $x+1$，所以平移至 $u=x+1$ 後，便得到簡潔的形式 $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-3}}$。這種形狀（一個變量乘以「其平方減去常數」的平方根）正是正割代換（secant substitution）的用武之地，用倒數代換（reciprocal substitution）$t=1/u$ 亦同樣可行。兩種代換都能把無限的積分範圍化為有限的範圍。

解答

配方

我們有

$$x^2+2x-2=(x+1)^2-3,$$

當 $x\geq 1$ 時此式為正，因為此時 $(x+1)^2\geq 4>3$，所以被積函數（integrand）在整個 $[1,\infty)$ 上都有定義。設 $u=x+1$，則 $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，當 $x=1$ 時 $u=2$，而當 $x\to\infty$ 時 $u\to\infty$：

$$I=\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}}=\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-3}}.$$

當 u 很大時，被積函數的表現近似 $1/u^2$，所以這個積分收斂（converges）。

正割代換

設 $u=\sqrt{3}\sec\theta$，其中 $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$。則

$$\mathrm{d}u=\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta,\qquad \sqrt{u^2-3}=\sqrt{3(\sec^2\theta-1)}=\sqrt{3}\tan\theta,$$

這裏我們用了在此範圍內 $\tan\theta \geq 0$ 這一事實，從而去掉絕對值（modulus）符號。

> **想一想** 新的積分上下限是甚麼？

在 $u = 2$ 時，我們需要 $\sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$，即 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$。當 $u \to \infty$ 時，$\sec\theta \to \infty$，所以 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（從下方趨近）。這個代換在 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上是遞增的，所以上下限的次序保持不變。

現在所有東西都約去了：

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{3}\sec\theta\cdot\sqrt{3}\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9}.$$

另一做法：倒數代換

假如一時想不起正割，$t = 1/u$ 同樣奏效，而且立刻把積分範圍變為有限。取 $u = 1/t$，則 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t/t^2$，而且對於 $t > 0$

$$u\sqrt{u^2-3} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\sqrt{1-3t^2}}{t} = \frac{\sqrt{1-3t^2}}{t^2}.$$

上下限 $u = 2$ 和 $u \to \infty$ 變為 $t = \frac{1}{2}$ 和 $t \to 0$，而負號把兩者的次序對調：

$$I = \int_0^{1/2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-3t^2}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}\,t)\right]_0^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

與第一種方法的結果一致。

驗算

- 對原函數（antiderivative）$F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$ 求導，便可還原出被積函數；於是 $F(\infty) - F(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$。
- 粗略估計大小：在 $[1,\infty)$ 上，被積函數比 $1/(x+1)^2$ 稍大，而後者的積分是 $\frac{1}{2}$。我們的答案是 $\pi/(3\sqrt{3}) \approx 0.6046$，略高於 $\frac{1}{2}$，正如所料。
- 對原積分作數值積分（numerical quadrature）（把範圍分段，並以 $x = 1/w$ 消去無限長的尾段），得 0.604600，與 $\pi/(3\sqrt{3}) = 0.6045998\ldots$ 吻合。

常見錯誤

- 忘記更改上下限：下限是 $\theta = \frac{\pi}{6}$，而不是 0；用 0 會得出錯誤答案 $\pi/(2\sqrt{3})$。
- 寫下 $\sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$，卻沒有檢查 $\tan\theta$ 在所用範圍內的正負號。
- 把答案留作 $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arcsec}(\ldots)$「在無窮遠處」取值，而沒有正確地取極限。

STEP 之外

這是一個廣義積分（improper integral）：嚴格來說，它的意思是 $\lim_{X\to\infty}\int_1^X$，而大學一年級的分析課程會精確說明這類極限何時存在（與 $\int^\infty u^{-2}\,\mathrm{d}u$ 作比較是標準的判別法）。這裏的代換亦是一套一般理論的起點：對於有理函數（rational function）R，求 $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ 的積分，總可以化為求有理函數的積分。關於廣義積分和比較判別法（comparison test），可參閱 Abbott, *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。