詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 3 題

純數學 • 二階微分方程

> **STEP I 樣本試卷，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q3

關鍵思路

二階方程難解，兩個一階方程卻容易。題目建議的代換（substitution）$z = y' - y$（以 y' 表示 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$）經過特意挑選，使方程左邊化為只含 z 和 z' 的式子。這樣便得到一個關於 z 的一階線性方程（first-order linear equation），然後再得到一個關於 y 的一階線性方程；兩者都可以用積分因子（integrating factor）解決。

解答

降階

設 $z = y' - y$，則 $z' = y'' - y'$。我們把方程左邊相應地拆開：

$$y'' + 2y' - 3y = (y'' - y') + 3(y' - y) = z' + 3z.$$

於是方程變成

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + 3z = 2\mathrm{e}^x.$$

由初始條件（initial conditions）得 $z(0) = y'(0) - y(0) = 2 - 1 = 1$。

> ? **想一想** 你會怎樣想到 $(y'' - y') + 3(y' - y)$ 這個拆法？

我們需要 $y'' + 2y' - 3y$ 等於 $z' + kz = y'' + (k-1)y' - ky$，其中 k 為某個常數。比較 y' 項得 $k = 3$，而此時 $-ky = -3y$ 亦吻合。（這個做法之所以可行，是因為 1 是輔助方程（auxiliary equation）$m^2 + 2m - 3 = (m-1)(m+3) = 0$ 的一個根；另一個根 -3 正是 $z' + 3z$ 中出現的數。）

求 z

乘以積分因子 e^{3x}，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z\mathrm{e}^{3x}) = 2\mathrm{e}^{4x} \quad \Longrightarrow \quad z\mathrm{e}^{3x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{4x} + A.$$

當 $x = 0$ 時，$1 = \frac{1}{2} + A$，所以 $A = \frac{1}{2}$，而

$$z = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}).$$

求 y

現在 $y' - y = z$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-3x}).$$

積分因子是 e^{-x}：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y\mathrm{e}^{-x}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x},$$

$$y\mathrm{e}^{-x} = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-4x} + B.$$

當 $x = 0$ 時，$1 = -\frac{1}{8} + B$，所以 $B = \frac{9}{8}$。各項乘以 e^{x}，

$$\boxed{y = \left(\frac{x}{2} + \frac{9}{8}\right)\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3x} = \frac{(4x+9)\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-3x}}{8}}$$

留意我們在這裏只用了 $y(0) = 1$；條件 $y'(0) = 2$ 在求 $z(0)$ 時已經用過，所以兩個條件都已用上。

驗算

- $y(0) = (9-1)/8 = 1$，而由 $y' = \left((4x+13)\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{-3x}\right)/8$ 得 $y'(0) = 16/8 = 2$。
- 代入驗證：e^{-3x} 是齊次方程（homogeneous equation）的解（$9 - 6 - 3 = 0$），e^{x} 也是（$1 + 2 - 3 = 0$）。對於 $x\mathrm{e}^{x}$，$y'' + 2y' - 3y = (x+2) + 2(x+1) - 3x = 4$ 乘以 e^{x}，所以 $\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x}$ 剛好貢獻 $2\mathrm{e}^{x}$。
- 數值上，用龍格—庫塔法（Runge–Kutta method）由 $x = 0$ 起逐步計算原方程，得 $y(1) \approx 4.41098$，與 $(13\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-3})/8$ 相符。

常見錯誤

- 在最後再用一次 $y'(0) = 2$，或者忘記把它轉換成 $z(0) = 1$。
- 改用「其他方法」而嘗試特別積分（particular integral）$c\,\mathrm{e}^{x}$：由於 e^{x} 本身已是齊次方程的解，這樣做行不通，需要改用 $cx\mathrm{e}^{x}$。代換法會自動處理這個問題。

STEP 之外

這個代換其實是把微分算子（differential operator）作因式分解：以 D 表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$，方程就是 $(D+3)(D-1)y = 2\mathrm{e}^x$，而 $z = (D-1)y$。這樣把算子分解，可以解釋常係數線性方程的整套理論，包括為何重根或「共振」（resonant）根會帶來額外的因子 x。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）對此有系統的闡述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。