詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 2 題

純數學 • 三角學與最優化

STEP I 樣本試卷，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s1-q2

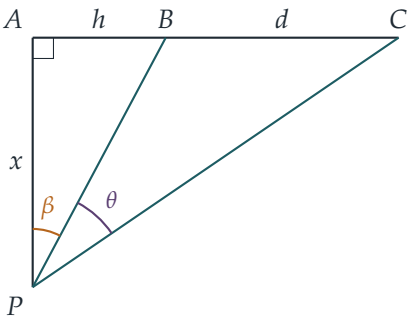
關鍵思路

角 θ 是以 P 為頂點的兩個角之*差*，而這兩個角各自位於一個直角在 A 的直角三角形內。它們的正切值可以直接從圖中讀出，因此只要用上 tan 的減法公式（subtraction formula）便可。至於求最大值，可把 $\tan\theta$ 改寫成 x 只在一處出現的形式，即 $x + (\text{常數})/x$，再用算術平均—幾何平均不等式（AM–GM inequality）便大功告成，完全不必動用微積分。

解答

求 $\tan\theta$

設 $\alpha = \angle APC$ 及 $\beta = \angle APB$。由於 B 位於 A 與 C 之間，故 $\theta = \alpha - \beta$。



在直角三角形 PAC 和 PAB 中（直角在 A），

$$\tan\alpha = \frac{AC}{AP} = \frac{h+d}{x}, \qquad \tan\beta = \frac{AB}{AP} = \frac{h}{x}.$$

由減法公式，

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{h+d}{x} - \dfrac{h}{x}}{1+\dfrac{h(h+d)}{x^2}}.$$

分子和分母同乘以 x^2，得

$$\boxed{\tan\theta = \frac{dx}{x^2+h(h+d)}}$$

（分母 $1+\tan\alpha\tan\beta$ 為正數，所以這條公式永遠不會失效。）

求 θ 的最大值

想一想 使 $\tan\theta$ 最大，是否等同於使 θ 最大？

在這裏是的。α 和 β 都嚴格介乎 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間，而且 $\alpha > \beta$，所以 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。在這個區間上 tan 是嚴格遞增（strictly increasing）的，因此 $\tan\theta$ 最大時 θ 也最大。

把分子和分母同除以 $x > 0$，得

$$\tan\theta = \frac{d}{x+\dfrac{h(h+d)}{x}}.$$

由於 d 是固定的，當分母 $x + h(h+d)/x$ 最小時，$\tan\theta$ 便最大。兩項皆為正數，故由算術平均—幾何平均不等式，

$$x + \frac{h(h+d)}{x} \;\geq\; 2\sqrt{x\cdot\frac{h(h+d)}{x}} = 2\sqrt{h(h+d)},$$

等號成立當且僅當兩項相等，即 $x = h(h+d)/x$，亦即 $x^2 = h(h+d)$。所以分母取得最小值、θ 取得最大值之處為

$$\boxed{x = \sqrt{h(h+d)}}$$

此時 $\tan\theta = \dfrac{d}{2\sqrt{h(h+d)}}$。

*或用微積分。*設 $k = h(h+d)$ 及 $f(x) = dx/(x^2+k)$，由商法則（quotient rule）得

$$f'(x) = \frac{d\,(k-x^2)}{(x^2+k)^2},$$

它在 $0 < x < \sqrt{k}$ 時為正，在 $x > \sqrt{k}$ 時為負，所以 f 先上升至 $x = \sqrt{k}$ 處的唯一極大值，然後下降。算術平均—幾何平均不等式的做法較快，而且一眼便看出這個極大值是全局最大值（global maximum）。

驗算

- 極限：當 $x \to 0$ 或 $x \to \infty$ 時，公式給出 $\tan\theta \to 0$。這是合理的：從非常接近 A 的位置，或從非常遠的地方看，線段 BC 在 P 所對的角幾乎為零。所以兩者之間必定有一個最大值。
- 對稱性：把 x 換成 $h(h+d)/x$ 時，$\tan\theta$ 保持不變，所以最大值必定出現在這個對換的不動點（fixed point），即 $x = \sqrt{h(h+d)}$。取 $h = 2$、$d = 1$，則 $x = 2$ 和 $x = 3$ 兩點給出相同的角（約 $11.31°$），而最大值在 $x = \sqrt{6}$ 處，約為 $11.54°$。
- 取 $h = 1$、$d = 3$：$x = 2$，而 $\tan\theta = 6/8 = \frac{3}{4}$，是 3–4–5 三角形中的角，即 $36.87°$。隨機抽取 20 000 組 (h, d, x)，直接由坐標計算 θ，結果與公式相符至 10^{-14}；以數值方法搜尋使角最大的 x，每次都與 $\sqrt{h(h+d)}$ 吻合。

常見錯誤

- 寫成 $\tan\theta = d/x$，彷彿 θ 位於一個直角三角形內。事實並非如此：直角在 A，不在 BC 上。
- 求 $\tan\theta$ 的最大值，卻沒有說明為何這樣便使 θ 最大；這需要 θ 一直處於 tan 遞增的區間內。

STEP 之外

這個答案有一個漂亮的幾何解釋。使 BC 所對的角為定值的點，都位於通過 B 和 C 的圓的弧上；在仍然與直線 AP 相交的這類圓之中，最小的一個給出最大的角，而這個圓正是在 P 與該直線相切的那一個。切割線定理（tangent–secant theorem，即點 A 的冪）隨即給出 $AP^2 = AB \cdot AC$，這正是 $x^2 = h(h+d)$。這就是雷格蒙塔努斯（Regiomontanus）問題，常見的問法是「應該站在哪裏，才能把基座上的雕像看得最清楚？」。要優化某個量，先轉而考慮另一個較易處理、但與它同升同降的量——這個想法貫穿大學一年級的分析學（analysis）；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 一書中還有很多同類的題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。