詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 15 題

概率與統計 • 隨機變量之和

> **STEP I 樣本試卷，第 15 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q15

關鍵思路

C 這個看似古怪的分佈，其實正是把一個價錢四捨五入至最接近的 10 便士時所產生的誤差，前提是價錢的最後一位數字等可能地取 $0, 1, \ldots, 9$ 中任何一個。於是，購物者的總誤差就是 36 個獨立而與 C 同分佈的變量之和，其平均值和方差（variance）可立即求得，而中心極限定理（Central Limit Theorem）則告訴我們，20 便士的差額有多令人意外。

解答

C 的期望值與方差

由於對每個 i 都有 $\mathrm{P}(C = i) = \mathrm{P}(C = -i)$，這個分佈關於 0 對稱。因此各項 $i\,\mathrm{P}(C = i)$ 兩兩抵消，得

$$\mathrm{E}(C) = 0.$$

（各概率之和確實是 $1 : 9 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{20} = 1$。）既然平均值是 0，方差就只是 $\mathrm{E}(C^2)$：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(C) = \mathrm{E}(C^2) &= 2 \cdot \frac{25}{20} + \frac{2}{10}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{2 \cdot 30}{10} = \frac{17}{2}.\end{aligned}$$

購物者的估算

模型。 對於一件貨品，設 C 為實際價錢減去捨入後的價錢，以便士為單位。它只取決於價錢的最後一位數字 d。我們假設 d 等可能地取 $0, 1, \ldots, 9$ 中任何一個；在這裏，「隨機」選購理應是這個意思，不過這畢竟是對現實價錢所作的一個假設。

- $d = 0$：無須捨入，所以 $C = 0$。
- $d = 1, 2, 3, 4$：價錢向下捨入了 d，所以 $C = d$。
- $d = 6, 7, 8, 9$：價錢向上捨入了 $10 - d$，所以 $C = -(10 - d)$，即 $-4, -3, -2, -1$。
- $d = 5$：價錢以相等的概率向下或向上捨入，所以 $C = 5$ 或 -5，各自的概率為 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$。

$-4, \ldots, 4$ 中每個值都恰好由一個數字產生，概率為 $\frac{1}{10}$，而 ± 5 的概率各為 $\frac{1}{20}$。這正正是第一部分的分佈，題目如此設定的原因也在於此。

總誤差。 設 $C_1, \ldots, C_{36}$ 為 36 件貨品各自的誤差，並設

$$S = C_1 + C_2 + \cdots + C_{36}$$

為真正的賬單金額減去購物者的估算。由於貨品是隨機選購的，我們視各個 C_j 為獨立（independent），且每個都與 C 同分佈。於是

$$\mathrm{E}(S) = 36 \cdot 0 = 0, \qquad \mathrm{Var}(S) = 36 \cdot \tfrac{17}{2} = 306,$$

其中計算方差時用到了獨立性。因此 S 的標準差（standard deviation）是 $\sqrt{306} \approx 17.5$ 便士。

> **想一想** 20 便士的差額算大還是算小？

這個差額必須與標準差比較，而不是與單次捨入誤差的大小比較。收銀員的賬單比估算高出 20 便士，即 $S = 20$。這比平均值高出

$$\frac{20}{\sqrt{306}} \approx 1.14$$

個標準差。由於 S 是 36 個獨立同分佈變量之和，中心極限定理指出 S 近似服從 $\mathrm{N}(0, 306)$。採用連續性校正（continuity correction）（因為 S 只取整數值），

$$\mathrm{P}(S \geq 20) \approx \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{19.5}{\sqrt{306}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1.11) \approx 0.13,$$

其中 $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$。至少這麼大的誤差（不論方向）大約有 26% 的機會出現。

所以購物者**不**應懷疑賬單出錯。20 便士的差額完全在她的捨入誤差的正常波動範圍之內，大約是一個標準差，而且大約每七、八次購物就會出現一次。只有差額超過大約兩個標準差，例如 35 便士或以上，她才有真正的理由起疑。

驗算

- 把價錢四捨五入至最接近的 10 便士，最多只會令它改變 5 便士，所以 36 件貨品在最壞情況下的誤差是 180 便士。典型誤差約為 17 便士，遠小於此，這也合乎預期：正誤差與負誤差大致互相抵消。
- 電腦驗證了捨入誤差的分佈與 C 完全相同，且 $\mathrm{E}(C) = 0$、$\mathrm{Var}(C) = \frac{17}{2}$。接着它以分數對 36 個相同的分佈作精確卷積（convolution）：$\mathrm{Var}(S) = 306$，$\mathrm{P}(S \geq 20) \approx 0.1330$；相比之下，正態近似（normal approximation）給出 0.1325，而 2×10^5 次模擬購物則給出 0.132。

常見錯誤

- 把 $\mathrm{Var}(S)$ 當作 $36^2\,\mathrm{Var}(C)$。那其實是 $36C$ 的方差，即同一個誤差重複 36 次；對於獨立的誤差，方差只須直接相加。
- 以 S 恰好等於 20 的概率（約 0.012）來衡量意外的程度。S 的每一個個別取值本身都相當不可能出現；真正重要的，是誤差至少與觀察所得一樣大的概率。
- 忘記說明所作的假設：價錢的最後一位數字服從均勻分佈（uniform distribution），而且各件貨品的誤差互相獨立。

STEP 之外

這就是假設檢驗（hypothesis test）背後的推理：先假定一切正常（在這裏，即 S 純粹是捨入誤差），然後問：出現至少與觀察所得同樣極端的結果，可能性有多大？同樣的捨入誤差分析也用於數值分析（numerical analysis），在那裏，對許多數字作捨入所產生的誤差，通常隨數字個數的平方根增長，而非線性增長。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門）對隨機變量（random variable）之和及中心極限定理有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。