詳細解答

# STEP I 樣本試卷，第 14 題

概率與統計 • 期望值

**STEP I 樣本試卷，第 14 題**

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s1-q14

## 關鍵思路

一切都取決於一個表：兩顆公平四面骰子點數總和的分佈（distribution）。有了這個表，無論猜哪個 $x$，期望收益（expected gain）都只是「獎金乘以勝出的機會，減去罰款乘以落敗的機會」。有趣的矛盾在於：猜大的數字獎金高，但機會小，所以要把所有猜測逐一比較，才看得出哪個最好。

## 解答

設 $S$ 為總點數。每顆骰子擲出 $1,2,3,4$ 的概率（probability）各為 $\frac{1}{4}$，而且兩顆骰子互相獨立（independent），所以 16 個有序對（ordered pairs）出現的可能性均等。數出每個總和對應的有序對數目，得

| $s$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(S=s)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{4}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{2}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

（例如，$S=5$ 來自 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$）。

若 $B$ 猜 $x$，並設 $p=\mathrm{P}(S=x)$，則他的收益 $G$（以便士計）有 $p$ 的概率為 $100x^2$，有 $1-p$ 的概率為 $-50x$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(G) &= 100x^2p - 50x(1-p)\\ &= 50x[(2x+1)p-1].\end{aligned}$$

寫成 $p=\frac{k}{16}$，其中 $k$ 是得出總和 $x$ 的方法數目，則

$$\mathrm{E}(G)=\frac{25x[k(2x+1)-16]}{8}.$$

### 第 (i) 部分

只有 $(4,4)$ 的總和是 8，所以 $p = \frac{1}{16}$，而

$$\mathrm{E}(G) = 6400 \cdot \frac{1}{16} - 400 \cdot \frac{15}{16} = 400 - 375 = 25,$$

因此 $B$ 猜 8 時的期望收益是 25 便士，正如題目所求。

### 第 (ii) 部分

猜 $2, 3, \ldots, 8$ 以外的數永遠不會勝出，所以（取 $x$ 為正數，因為點數必為正數）只會輸錢。對於七個可能的總和，上面的公式給出

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| $\mathrm{E}(G)$（便士） | −68.75 | −18.75 | 137.5 | 437.5 | 431.25 | 306.25 | 25 |

例如，當 $x = 5$ 時：$\mathrm{E}(G) = \frac{25 \cdot 5\,(4 \cdot 11 - 16)}{8} = \frac{125 \cdot 28}{8} = 437.5$。

**想一想** 獎金按 $x^2$ 的速度增長，那麼為甚麼猜 7 或 8 這樣的大數並不是最好？

獎金確實增長得很快，但勝出的機會在 5 的兩側逐漸下降，而猜錯的可能性大得多，一旦猜錯就要付罰款。在 $x = 8$ 時，勝出的機會已跌至 $\frac{1}{16}$，幾乎剛好抵銷了高額獎金。這兩種效應在中間附近取得最佳平衡：$x = 6$ 的獎金比 $x = 5$ 高，但勝出的方法只有三種而不是四種，結果僅僅稍遜一籌。

所以我們建議 $B$ 猜 $\boxed{x = 5}$，期望收益為 437.5 便士，即每局 £4.375（約 £4.38）。

## 驗算

- 表中各概率之和為 $\frac{16}{16} = 1$。
- 第 (i) 部分的結果剛好是 25，印證了分佈表和公式。
- 模擬 400 000 局猜 5 的遊戲，平均收益約為 437.2 便士，而準確值是 437.5。

## 常見錯誤

- 把總和 2 至 8 當作可能性均等：其實不然，因為可能性均等的結果是那 16 個有序對。
- 忘記 $B$ 是以 $1 - p$ 的概率輸掉 $50x$，而不是以概率 1 輸掉。
- 因為獎金較高，就停在 $x = 6$ 或 $x = 7$：5 和 6 的結果很接近，所以每個值都必須計算。

## STEP 之外

這是一個小型的決策問題：選擇令期望回報最大的行動。在大學裏，同樣的想法會在決策論（decision theory）中出現，也會在研究獨立隨機變量（random variables）之和時出現；在後者，和的分佈是用卷積（convolution）求出的（在這裏就是分佈表的三角形狀），而當骰子數目很多時，根據中心極限定理（central limit theorem），這個分佈會趨近正態曲線（normal curve）。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教材）涵蓋了這兩個課題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。