詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 13 題

力學 • 圓周運動

> **STEP I 樣本試卷，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q13

關鍵思路

這是一個弦線可以伸長的圓錐擺（conical pendulum）。胡克定律（Hooke's law）把張力（tension）與弦線的長度聯繫起來，而沿垂直和水平方向分解力，則把張力與 g 和 ω 聯繫起來。由於弦線與垂直線的夾角不為零，張力必須嚴格大於 mg，而兩個不等式都是由這一項事實推導出來的。

解答

把質點視為繫於一條輕彈性弦線（light elastic string）上的點質量，弦線遵從胡克定律，並且不計空氣阻力。設 λ 為彈性模量（modulus of elasticity）。

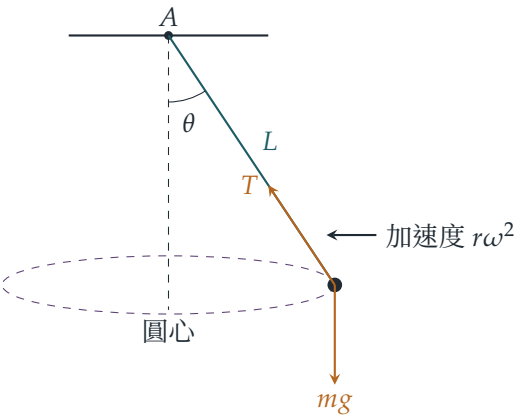
彈性模量。 質點靜止懸掛時，弦線的伸長量（extension）為 $2a - a = a$，而張力與重量平衡：

$$mg = \frac{\lambda a}{a} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = mg.$$

因此當弦線的長度為 L 時，其張力為

$$T = \frac{mg(L-a)}{a}.$$

圓周運動。 假設質點在 A 下方的一個水平圓上運動，長度為 L 的弦線與向下的垂直線成 θ 角。由於這是一個位於 A 所在水平之下的真正的圓周運動，我們有 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，所以 $\sin\theta > 0$ 且 $0 < \cos\theta < 1$。圓心在 A 的正下方，半徑為 $r = L\sin\theta$。



質點繞通過 A 的垂直線的角速率（angular speed）為 ω，所以它的加速度為 $r\omega^2 = L\omega^2 \sin\theta$，方向水平指向圓心。垂直方向沒有加速度。

沿垂直方向分解：

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

沿水平方向（指向圓心）分解：

$$T\sin\theta = mL\omega^2\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad T = mL\omega^2, \tag{2}$$

其中因為 $\sin\theta \neq 0$，我們可以除以 $\sin\theta$。

> **想一想** 「這是一個真正的圓周運動（而不只是質點靜止懸掛）」這項事實，在哪裏用到了？

它用到了兩次：在 (2) 中除以 $\sin\theta$，以及在下文指出 $\cos\theta < 1$。若 $\theta = 0$，質點只是靜止懸掛在軸上，(2) 沒有提供任何資訊，而任何 ω 都「行得通」。

弦線長於 $2a$。 由 (1)，因為 $0 < \cos\theta < 1$，

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} > mg.$$

利用胡克定律，這即是說

$$\frac{mg(L-a)}{a} > mg \quad\Longrightarrow\quad L - a > a \quad\Longrightarrow\quad L > 2a,$$

所以弦線被拉長至大於 $2a$ 的長度。

ω 的範圍。 把由胡克定律和由 (2) 得到的兩個 T 的表達式等同起來：

$$mL\omega^2 = \frac{mg(L-a)}{a} \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{g}{a}\left(1 - \frac{a}{L}\right).$$

由於 $L > 2a$，我們有 $0 < \frac{a}{L} < \frac{1}{2}$，所以 $\frac{1}{2} < 1 - \frac{a}{L} < 1$。因此

$$\frac{g}{2a} < \omega^2 < \frac{g}{a},$$

這正是我們要證明的結果。

逆命題（converse）（題目沒有要求，但令人安心）。 若 ω 位於這個範圍內，取 $L = \dfrac{a}{1 - a\omega^2/g}$。它是正數，滿足 $L > 2a$，並給出 $\cos\theta = \dfrac{mg}{T} = \dfrac{a}{L-a}$，其值嚴格介乎 0 與 1 之間。所以對於每一個這樣的 ω，確實存在一個圓錐運動。

驗算

- 極限：當 $L \to 2a$ 時，張力趨向 mg，$\theta \to 0$ 且 $\omega^2 \to g/(2a)$，這正是長度為 $2a$ 的單擺（simple pendulum）作小幅擺動的頻率。當 $L \to \infty$ 時，$\omega^2 \to g/a$。
- 數值方面：取 $\omega^2 = \frac{3}{4}\,g/a$，我們得到 $L = 4a$、$T = 3mg$ 和 $\cos\theta = \frac{1}{3}$。從這些初始條件出發，以數值方法逐步求解完整的三維運動方程，計算兩周，質點始終留在所預測的圓上，誤差不超過 10^{-13} 個單位。
- 單位：g/a 的單位是 s^{-2}，與 ω^2 應有的單位相符。

常見錯誤

- 把圓的半徑當作 L 而不是 $L\sin\theta$。這樣 (2) 中的 $\sin\theta$ 便無法約去。
- 忘記了 $T > mg$ 需要 $\cos\theta < 1$，即 $\theta \neq 0$。嚴格不等式正是取決於這一點。
- 以自然長度（natural length）a（或平衡時的長度 $2a$）而不是拉長後的長度 L 作為半徑。

STEP 之外

下限 $\omega^2 = g/(2a)$ 是繞垂直線作小幅振動的頻率，而這並非巧合：靠近軸的穩定圓錐運動，其實就是兩個互相垂直的小幅擺動，彼此相位相差四分之一個周期。上限則是弦線的剛度（stiffness）無論伸長多少都再也無法提供向心力（centripetal force）之處。研究穩定運動及其穩定性（stability），例如探討質點被輕輕推離圓形軌道後會發生甚麼事，是大學一年級動力學的標準課題。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對圓錐擺以及旋轉系統中運動的分析，有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。