詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 12 題

力學 • 涉及摩擦力的碰撞

STEP I 樣本試卷，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s1-q12

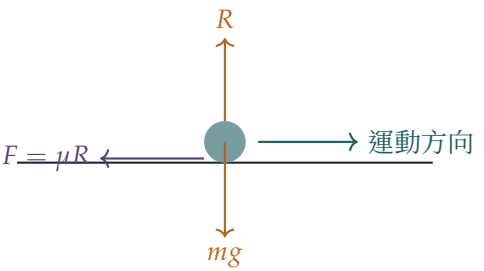
關鍵思路

這一題的主角是摩擦力（friction）。圓盤在水平冰面上滑行時，受到恆定的阻力，因此減速度（deceleration）不變，各事件之間的運動其實只是「勻加速運動」換了個面貌。我們由終點倒推回去：B 的停止距離決定了它在碰撞後的速率，碰撞定律把這個速率轉化為 A 在碰撞前一刻的速率，再用一次勻加速運動的公式，便可回到起點 O。

解答

模型

把每個圓盤視為質量為 m 的質點（particle），置於摩擦系數（coefficient of friction）為 μ 的粗糙水平面上。圓盤滑行時，所受的力有：向下的重量 mg、向上的法向反作用力（normal reaction）R，以及與運動方向相反的極限摩擦力（limiting friction）F。



沿垂直方向分解：垂直方向沒有加速度，所以 $R = mg$。圓盤正在滑動，故摩擦力達到極限值：$F = \mu R = \mu mg$。沿水平方向分解，$m\ddot{x} = -\mu mg$，所以每個滑行中的圓盤都以

恆定的減速度

$$a = \mu g,$$

減速，與其質量無關。我們又假設碰撞在瞬間完成，摩擦力在碰撞過程中來不及起作用；這時只需考慮兩圓盤之間的碰撞力，而沿 OC 方向的動量（momentum）守恆。

B 在碰撞後的速率

B 由距離 O 為 d 的一點出發，停在距離 O 為 $2d$ 的 C 點，所以它滑行的距離是 d。設它在碰撞後一刻的速率為 w。利用 $v^2 = u^2 + 2as$，其中末速率為 0，加速度為 $-\mu g$，位移為 d，

$$0 = w^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad w = \sqrt{2\mu g d},$$

這正是所要求的結果。

A 在碰撞前一刻的速率

設 A 以速率 u 撞向 B，並設 A 在碰撞後一刻的速度為 v_A（兩者均以 $O \to C$ 的方向為正）。由於兩圓盤質量同為 m，動量守恆（conservation of momentum）給出

$$mu = mv_A + mw \quad \Longrightarrow \quad u = v_A + w,$$

而牛頓（Newton）實驗定律給出

$$w - v_A = eu.$$

兩式相加可消去 v_A：$2w = (1+e)u$，所以

$$u = \frac{2w}{1+e} = \frac{2\sqrt{2\mu g d}}{1+e}.$$

（若改為兩式相減，則得 $v_A = \frac{1}{2}(1-e)u \geq 0$，所以 A 會以較慢的速率沿原來方向繼續前進。）

想一想 A 會不會再次追上 B，令以上的計算失效？

不會。碰撞之後，兩個圓盤都以相同的減速度 μg 減速，所以只要兩者仍在運動，它們的速率差 $w - v_A = eu$ 便保持不變。B 永遠不會比 A 慢，所以一直在前面；而 A 起步較慢，會先停下來。因此碰撞恰好只有一次，B 由 d 到 $2d$ 的一段路程不受干擾。（當 $e = 0$ 時，兩個圓盤一起運動直至停下，同樣不會再有碰撞。）

初速率

A 由 O 滑行距離 d 到達 B，期間以 μg 減速，所以再用一次 $v^2 = u^2 + 2as$，

$$u^2 = U^2 - 2\mu g d \quad \Longrightarrow \quad U^2 = u^2 + 2\mu g d.$$

代入 u 的表達式，

$$U^2 = \frac{4 \cdot 2\mu g d}{(1+e)^2} + 2\mu g d = \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}(4 + (1+e)^2)$$
$$= \frac{2\mu g d}{(1+e)^2}(5 + 2e + e^2).$$

由於 $U > 0$ 且 $1 + e > 0$，取正平方根，

$$U = \frac{\sqrt{2\mu g d}}{1+e}(5 + 2e + e^2)^{\frac{1}{2}},$$

即為所求。

驗算

- 完全彈性（perfectly elastic），$e = 1$：兩個相同的圓盤會互換速度，所以 A 立即停下，而 B 則以 A 抵達時的速率 $u = w$ 離開。公式給出 $U = \sqrt{2}\sqrt{2\mu g d} = \sqrt{2\mu g(2d)}$，恰好是單獨一個圓盤滑完整段 $2d$ 到達 C 所需的速率。這很合理：動量原封不動地傳了過去。
- 完全非彈性（perfectly inelastic），$e = 0$：公式給出 $U = \sqrt{5}\sqrt{2\mu g d}$，比 $e = 1$ 時大，這是應有的結果，因為碰撞中有動能（kinetic energy）損失。更一般地，$(5 + 2e + e^2)/(1+e)^2 = 1 + 4/(1+e)^2$ 隨 e 增大而減小。
- 量綱（dimensions）：μ 和 e 都是純數，而 $\sqrt{gd}$ 是速率。
- 數值上，取 $\mu = 0.1$、$g = 9.8\ \mathrm{m\,s^{-2}}$、$d = 1\ \mathrm{m}$ 和 $e = 0.5$，公式給出 $U = \frac{7}{3} \approx 2.33\ \mathrm{m\,s^{-1}}$。由這個 U 出發，以細小的時間步長逐步推算運動（並隨機選取多組 μ、d 和 e），結果 B 停下的位置與 O 的距離和 $2d$ 相差不超過 0.001%。

常見錯誤

- 對碰撞前後使用能量守恆。除非 $e = 1$，否則碰撞中會有動能損失；碰撞時應使用動量和恢復定律（restitution law），而功能原理（work–energy，或 $v^2 = u^2 + 2as$）只可用於各事件之間。
- 忘記 A 在碰撞前同樣要滑行距離 d，誤寫成 $U = u$。
- 把恢復定律寫反了：應該是分離速率 $w - v_A$ 等於 e 乘以接近速率 u。

STEP 之外

這一題的巧妙之處，在於摩擦力令每個圓盤都有相同的減速度，與質量無關；因此在一個以 μg 減速的參考系（frame）中，只要兩個圓盤都在滑行，冰面便等同於沒有摩擦，而碰撞看起來就和教科書上的一模一樣。選取合適的參考系是大學本科力學的核心技巧，而摩擦定律 $F = \mu R$ 本身只是一個經驗模型，它的適用範圍值得了解。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）對碰撞和摩擦都有細緻的處理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。