詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 11 題

力學 • 摩擦力與滾動接觸

STEP I 樣本試卷，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s1-q11

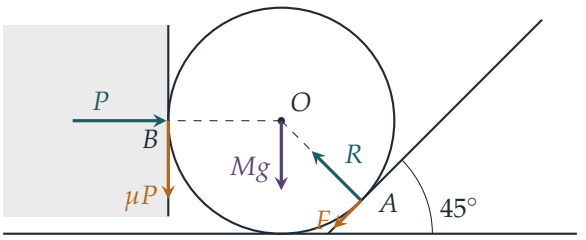
關鍵思路

在圓柱體即將移動的一刻，地面不再施力，因此只需考慮三個作用：重量、垂直面和斜面。「滾動」表示圓柱體在斜面上不打滑，所以它開始繞着與斜面的接觸點轉動。只要找出與垂直面接觸的那一點此時如何運動，便會發現圓柱體必須沿垂直面滑動。因此，摩擦力（friction）正是在那裏達到極限。再對圓心取力矩（moment），便可毫不費力地求得斜面的摩擦力。

解答

模型。圓柱體是半徑為 r 的均勻剛體（rigid body），我們在通過其中心 O 的垂直截面上處理這個問題。設備的面是垂直的，並沿水平方向移動。設 B 為圓柱體與該面的接觸點，它與 O 處於同一高度；A 為圓柱體與斜面的接觸點。由於斜面的傾角為 45°，OA 與向下的鉛垂線成 45°。取 x 軸向右（指向斜面），y 軸向上，並以 O 為原點，於是

$$B = (-r,\, 0), \qquad A = \tfrac{r}{\sqrt{2}}(1,\, -1).$$



哪一處的摩擦力達到極限

當圓柱體即將移動時，它正要離開地面，所以地面的法向反作用力（normal reaction）為零，地面的摩擦力亦隨之為零。要滾上斜面，圓柱體在 A 點必須不打滑，所以它的運動以繞 A 的轉動開始，而中心則沿 $(1,1)$ 方向向斜面上方移動。這個轉動是順時針方向的。設角速率（angular speed）為 ω，則圓柱體上一點 X 的速度等於 ω 乘以 $X-A$ 順時針旋轉 90° 後所得的向量，即把 $\omega\,(y,-x)$ 用於 $X-A=(x,y)$。對於 $X=B$，

$$B-A=r\Big(-1-\tfrac{1}{\sqrt{2}},\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)\quad\Longrightarrow\quad \mathbf{v}_B=\omega r\Big(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\,1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

該面只作水平移動，但 B 的速度有向上的分量，所以 B 沿該面向上滑動。圓柱體不可能同時在兩個表面上滾動，所以它必定在垂直面上打滑，因此**摩擦力在垂直面上達到極限**。摩擦力與滑動方向相反，所以它作用於圓柱體的方向是向下，大小為 μP。在斜面上沒有打滑，所以斜面摩擦力 F 的大小由平衡（equilibrium）條件決定，只須滿足 $F\le \nu R$。（我們以 ν 表示斜面的摩擦系數（coefficient of friction），題目中印作 v。）

> ? **想一想** 為甚麼不可以是斜面上的摩擦力達到極限？

假如圓柱體在 A 點打滑，它便是沿斜面向上滑動，而不是滾動。滾動的意思就是在 A 點不打滑。上面的計算顯示，滾動必然導致 B 點打滑，所以 B 才是摩擦力達到法向反作用力的 μ 倍的接觸點。

求 P

設 R 為斜面的法向反作用力，沿 AO 方向（方向為 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$），並設 F 為斜面摩擦力，以沿斜面向下為正（方向為 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1)$）。

對 O 取力矩。重量、P 和 R 的作用線全部通過 O。B 點的摩擦力 μP 的力臂為 r，使圓柱體逆時針轉動。A 點的摩擦力 F 沿切線方向，所以力臂同樣為 r；當它指向斜面下方時，會使圓柱體順時針轉動。因此

$$\mu P\,r=Fr\quad\Longrightarrow\quad F=\mu P.$$

所以斜面摩擦力確實沿斜面向下，而且大小與垂直面上的摩擦力相同。

沿水平方向分解：

$$P-\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{\mu P}{\sqrt{2}}=0\quad\Longrightarrow\quad R=\sqrt{2}\,P-\mu P=P(\sqrt{2}-\mu).\tag{1}$$

沿垂直方向分解：

$$\frac{R}{\sqrt{2}}-\frac{\mu P}{\sqrt{2}}-\mu P-Mg=0.\tag{2}$$

把由 (1) 得出的 $R/\sqrt{2} = P - \mu P/\sqrt{2}$ 代入 (2)，

$$P - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \frac{\mu P}{\sqrt{2}} - \mu P = Mg$$
$$P(1 - \mu - \sqrt{2}\,\mu) = Mg,$$

其中用到 $2/\sqrt{2} = \sqrt{2}$。因此

$$P = \frac{Mg}{1 - \mu(1+\sqrt{2})},$$

正是所求的結果。

μ 和 ν 須滿足的條件

關於 μ。P 是推力的大小，而 $Mg > 0$，所以我們需要 $1 - \mu(1+\sqrt{2}) > 0$，即

$$\mu < \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1.$$

若 $\mu \geq \sqrt{2} - 1$，無論推力多大，都無法把圓柱體滾上斜面：垂直面上額外的向下摩擦力隨 P 增長的速度，至少與上升力的增長一樣快，於是圓柱體被卡死。

關於 ν。圓柱體在斜面上不打滑，所以 $F \leq \nu R$。利用 $F = \mu P$ 和 (1)，並留意到由於 $\mu < \sqrt{2} - 1 < \sqrt{2}$，故 $R > 0$，

$$\mu P \leq \nu P(\sqrt{2} - \mu) \quad \Longleftrightarrow \quad \nu \geq \frac{\mu}{\sqrt{2} - \mu},$$

其中我們除以了 $P(\sqrt{2} - \mu) > 0$。至此全題完成。

驗算

- *光滑的面*，$\mu = 0$：此時 $P = Mg$，而且不需要斜面摩擦力。這與一個無摩擦的圓柱體楔在垂直牆壁與 45° 斜面之間的情況吻合：斜面反作用力的水平分量和垂直分量相等，所以它必須同等地平衡 P 和 Mg。
- *數值*：取 $\mu = 0.2$，則 $P \approx 1.934\,Mg$，而我們需要 $\nu \geq 0.165$。把這些數值代回去，水平方向的力、垂直方向的力以及對 O 的力矩全部平衡（在捨入誤差之內）；對隨機選取的 M 和 μ 亦然。
- 當 $\mu \to \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$ 時，$P \to \infty$，這與上文所述的卡死現象一致。

常見錯誤

- 把斜面上的摩擦力當作達到極限。「滾動」已排除了該處打滑的可能。

- 保留了地面的反作用力。在即將滾上斜面的一刻，圓柱體正要離地，所以地面的反作用力為零。
- 弄錯垂直面上摩擦力的方向。B 相對於該面向上移動，所以作用於圓柱體的摩擦力是向下的。這正是 P 大於 Mg 的原因。

STEP 之外

本題的關鍵一步，是藉着觀察瞬時轉動中心（instantaneous centre of rotation）來判斷哪一個接觸點打滑，這正是剛體運動學（rigid-body kinematics）的起點。在大學一年級的課程中，它會引伸出一般法則 $\mathbf{v}_X = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (X - O)$，以及多個粗糙接觸點互相競爭的問題。在 $\mu \geq \sqrt{2} - 1$ 時出現的「卡死」現象，即怎樣加大推力也無濟於事，是一種自鎖（self-locking）效應，工程師會在楔子和夾具中刻意加以利用。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是以這種嚴謹的態度處理剛體運動和摩擦力。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。