詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 10 題

力學 • 功率與阻力

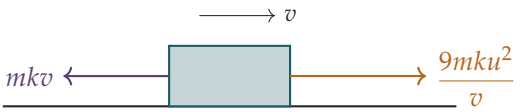
> **STEP I 樣本試卷，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q10

關鍵思路

功率（power）等於力乘以速率，所以以恆定功率 P 運作的機車，其牽引力（driving force）為 P/v。由牛頓第二定律（Newton's second law）便得到一條關於 v 的一階微分方程（first-order differential equation），而且可以分離變數（separation of variables）。關鍵在於選對加速度的形式：題目問時間時用 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$，問距離時用 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。

解答

把機車看成一個質量為 m 的質點（particle），在水平路軌上行駛，因此它的重量與法向反作用力（normal reaction）互相抵消，只需考慮水平方向的力。取運動方向為正。



最大速率

速率為 v 時，牽引力為 $9mku^2/v$，所以由牛頓第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{9mku^2}{v} - mkv \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{k\,(9u^2 - v^2)}{v}.$$

當 $v < 3u$ 時，右邊為正，所以機車會加速。只有在牽引力與阻力（resistance）平衡，即 $9u^2 = v^2$ 時，它才會停止加速。因此可能達到的最大速率為

$$v_{\max} = 3u.$$

想一想 只要 $v < 3u$，機車就一直在加速，那為甚麼它到不了 $3u$？

當 $v \to 3u$ 時，加速度會減小至零。分離變數後，由速率 v_1 加速至速率 v_2 所需的時間為

$$t = \frac{1}{k}\int_{v_1}^{v_2} \frac{v}{9u^2 - v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - v_1^2}{9u^2 - v_2^2}\right),$$

而當 $v_2 \to 3u$ 時，這個時間趨向無限大。所以 $3u$ 是終端速率（terminal speed）：機車的速率可以任意接近它，卻永遠不會在有限時間內真正達到它。（換個說法，$v = 3u$ 是這條微分方程的一個平衡點（equilibrium），而根據解的唯一性（uniqueness of solutions），從它下方出發的解不可能到達它。）

由 u 到 $2u$

在上面的公式中代入 $v_1 = u$ 和 $v_2 = 2u$：

$$t = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{9u^2 - u^2}{9u^2 - 4u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8u^2}{5u^2}\right) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{8}{5}\right),$$

正是所求。

切斷動力

現在只剩下兩個阻力 mkv 和 mkB，兩者都與運動方向相反。我們要求的是距離，所以把加速度寫成 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$：

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -mk(v + B) \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{v + B}\,\mathrm{d}v = -k\,\mathrm{d}x.$$

寫成 $\dfrac{v}{v+B} = 1 - \dfrac{B}{v+B}$，然後積分，其中 v 由 $2u$ 下降至 0，而 x 由 0 增加至 D：

$$\begin{aligned} kD &= \int_0^{2u}\left(1 - \frac{B}{v+B}\right)\mathrm{d}v \\ &= \Big[v - B\ln(v+B)\Big]_0^{2u} \\ &= 2u - B\ln\left(\frac{2u+B}{B}\right). \end{aligned}$$

所以切斷動力後行駛的距離為

$$D = \frac{1}{k}\left[2u - B\ln\left(1 + \frac{2u}{B}\right)\right].$$

這一次機車確實會在有限時間內停下：$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -k(v+B) \le -kB < 0$，所以減速度（deceleration）永遠不會小於 kB。這正是需要額外加上一個恆定阻力的原因。

驗算

- 當 $B \to 0$ 時，$B\ln(1+2u/B) \to 0$，所以 $D \to 2u/k$。這與只有阻力 mkv 的情況吻合：此時 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = -kv$，即 v 隨距離以 k 的速率線性下降。
- $D > 0$，因為當 $y > 0$ 時 $\ln(1+y) < y$，由此得 $B\ln(1+2u/B) < 2u$。而且 D 隨 B 增大而減小，合乎預期。
- 數值上，取 $k = u = B = 1$，把運動方程逐步推算，得出停止距離為 0.90139，與 $2 - \ln 3 \approx 0.90139$ 吻合。由 $v = 1$ 起，把有動力的階段逐步推算至時間 $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5} \approx 0.2350$，最後得 $v = 2.0000$。

常見錯誤

- 把牽引力當作常數。在恆定功率下，牽引力是 P/v，會隨機車加速而減小。
- 在最後一部分使用 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$。這樣求得的是停止所需的時間，而不是距離。
- 聲稱機車「最終」會達到 $3u$。時間積分是發散（diverge）的，所以它永遠達不到。

STEP 之外

速率 $3u$ 是自治方程（autonomous equation）$\dot{v} = f(v)$ 的一個穩定平衡點（stable equilibrium）。解會以指數方式趨近它，卻永遠不會與它相遇，因為性質良好的微分方程的解不可能相交或合併。這讓你初次領略唯一性定理（uniqueness theorem）和相線分析（phase-line analysis），兩者都是大學微分方程入門課程的內容。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）對這兩者都有講解。想進一步了解功率和阻力，可參考 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。