詳細解答

STEP I 樣本試卷，第 1 題

純數學 • 判別式與部分分式

> **STEP I 樣本試卷，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/spec-s1-q1

關鍵思路

在第 (i) 部分，對每個固定的 x，方程都是 y 的二次方程（quadratic equation），而只有當判別式（discriminant）非負時，才存在實數 y；這個條件正好就是對 x 的限制。把兩者的角色對調，方程同樣是 x 的二次方程，由此得出對 y 的限制。第 (ii) 部分是一道標準的部分分式（partial fractions）題目：把分式拆成若干項，而每一項的二項展開式（binomial expansion）都是我們已知的，然後把 x^n 的係數相加。

解答

第 (i) 部分

把方程看成 y 的二次方程，其係數取決於 x：

$$y^2 + 16xy + (4x^2 + 24x) = 0.$$

對於給定的實數 x，存在實數 y 滿足此方程，當且僅當判別式非負：

$$\begin{aligned}(16x)^2 - 4(4x^2 + 24x) &= 256x^2 - 16x^2 - 96x \\ &= 240x^2 - 96x = 48x(5x - 2) \geq 0.\end{aligned}$$

乘積 $x(5x-2)$ 非負，正好是在兩個因子同號（或其中一個為零）的時候，即 $x \leq 0$ 或 $x \geq \frac{2}{5}$。因此任何實數解都滿足

$$x \leq 0 \quad \text{或} \quad x \geq \tfrac{2}{5},$$

這正是所要證明的。

現在把方程看成 x 的二次方程：

$$4x^2 + (16y + 24)x + y^2 = 0.$$

存在實數 x，當且僅當

$$\begin{aligned}(16y + 24)^2 - 16y^2 &= 256y^2 + 768y + 576 - 16y^2 \\ &= 240y^2 + 768y + 576 \\ &= 48(5y^2 + 16y + 12) = 48(5y + 6)(y + 2) \geq 0.\end{aligned}$$

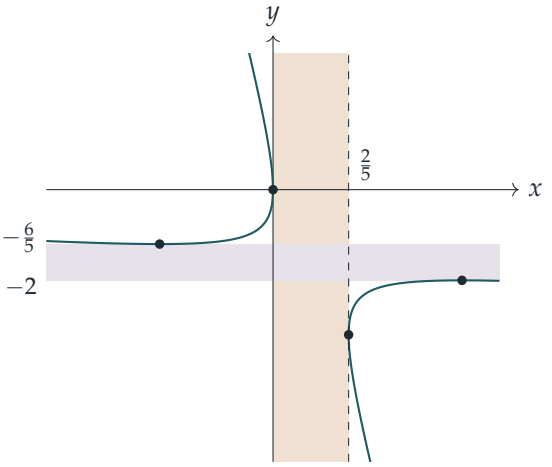
$(5y + 6)(y + 2)$ 的根是 $y = -2$ 和 $y = -\frac{6}{5}$，而這個二次式只在兩根之間取負值。因此

$$y \leq -2 \quad \text{或} \quad y \geq -\tfrac{6}{5}.$$

想一想 這些限制是否已是最佳的？真正的取值範圍會不會更小？

這些限制是精確的。判別式的論證是「當且僅當」的關係：每一個滿足 $x \leq 0$ 或 $x \geq \frac{2}{5}$ 的 x 都至少對應一個實數 y，對 y 亦然。邊界值同樣可以取到，由重根（double root）給出：對於 x 的界限，是 $(x, y) = (0, 0)$ 和 $(\frac{2}{5}, -\frac{16}{5})$；對於 y 的界限，是 $(1, -2)$ 和 $(-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5})$。你可以驗證每一點都滿足原方程。

從幾何上看，這條曲線是雙曲線（hyperbola）（因為 $16^2 > 4 \cdot 4 \cdot 1$），而被排除的兩條帶狀區域就是它兩支之間的空隙。



第 (ii) 部分

設

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{2-x} + \frac{C}{(2-x)^2},$$

於是 $9 = A(2-x)^2 + B(2-x)(1+x) + C(1+x)$。代入 $x=-1$ 得 $9 = 9A$，故 $A=1$；代入 $x=2$ 得 $9 = 3C$，故 $C=3$；代入 $x=0$ 得 $9 = 4A + 2B + C = 7 + 2B$，故 $B=1$。因此

$$\frac{9}{(2-x)^2(1+x)} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} + \frac{3}{(2-x)^2}.$$

現在把每一項展開，先抽出因子 2，使二項級數（binomial series）以 $\frac{x}{2}$ 的冪表示：

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n, \qquad |x|<1,$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{x}{2}\Big)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2^{n+1}}, \qquad |x|<2,$$

$$\frac{3}{(2-x)^2} = \frac{3}{4}\Big(1-\frac{x}{2}\Big)^{-2} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{x^n}{2^n} = \sum_{n\geq 0}\frac{3(n+1)}{2^{n+2}}x^n, \qquad |x|<2,$$

其中用到當 $|u|<1$ 時 $(1-u)^{-2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)u^n$。相加後，$x^n$ 的係數是

$$(-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3(n+1)}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{2+3n+3}{2^{n+2}} = (-1)^n + \frac{3n+5}{2^{n+2}}.$$

三個級數同時收斂（converge），正好是在 $|x|<1$ 的時候（第一個需要 $|x|<1$，其餘兩個只需要 $|x|<2$）。當 $1\leq |x|<2$ 時，後兩個級數仍然收斂，但第一個不收斂，所以它們的和也不可能收斂。因此展開式成立的範圍是

$$-1 < x < 1.$$

驗算

在第 (i) 部分，點 $(1,-2)$ 給出 $4-32+4+24=0$，而 $(-\frac{3}{5},-\frac{6}{5})$ 給出 $\frac{36}{25}+\frac{288}{25}+\frac{36}{25}-\frac{360}{25}=0$，確認 y 的兩個界限都可以取到。在第 (ii) 部分，$n=0$ 給出 $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$，與 $x=0$ 時的 $\frac{9}{4\cdot 1}$ 吻合；而 $n=1$ 給出 $-1+\frac{8}{8}=0$，這是正確的，因為分母 $(2-x)^2(1+x) = 4-3x^2+x^3$ 沒有 x 項。從數值上看，在 $x=0.9$ 處把級數求和得 $3.914745\ldots$，與 $9/(1.1^2\times 1.9)$ 一致。

常見錯誤

- 把不等號的方向弄反，答成 $-2\leq y\leq -\frac{6}{5}$。判別式在兩根之間為負，所以被排除的正是這個區間（而且 $(0,0)$ 在曲線上，其 $y=0$ 位於該區間之外）。
- 把 $(2-x)^{-1}$ 當作 $(1-x)^{-1}$ 來展開，忘記抽出因子 $\frac{1}{2}$（平方項則是 $\frac{1}{4}$）。
- 把成立範圍寫成 $|x|<2$：展開式只在每一項都收斂的地方才成立，所以是 $|x|<1$。

STEP 之外

第 (i) 部分的曲線是一條圓錐曲線（conic），它是橢圓、拋物線還是雙曲線，取決於其二次項 $ax^2 + bxy + cy^2$ 的 $b^2 - 4ac$ 的正負號。在大學裏，這會透過二次型（quadratic form）的對稱矩陣（symmetric matrix）及其特徵值（eigenvalue）來理解。第 (ii) 部分觸及收斂半徑（radius of convergence）的概念：展開式一直成立到函數趨向無窮大的最近一點為止，在這裏就是 $x = -1$。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）講述二次型，而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（數學分析導論）則講述冪級數（power series）及其收斂性。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。