詳細解答

STEP III 1999，第 9 題

力學 • 牛頓殼層定理

> **STEP III 1999，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q9

本題在 *Beyond STEP* 第 10.7 節球殼內的引力中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/shell-theorem.html

關鍵思路

一個有大小的物體所產生的引力（gravity），是它各個小部分的引力的向量和（vector sum）。對圓環而言，對稱性（symmetry）已經完成了大部分工作：圓環上位置相對的兩小段，其橫向的拉力互相抵銷，而且每一小段與質點（particle）的距離都相同，所以最後只剩下一個簡單的分量（component）。對球殼（shell）而言，我們把它切成許多圓環，使這些圓環的軸都通過質點，再對每一片應用圓環的結果，然後用積分把各片加起來。只要選對代換（substitution），這個積分便會化為零。

解答

圓環

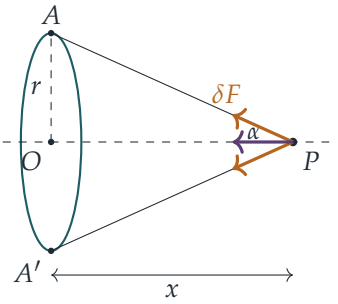
把圓環看成一個質量為 m 的均勻細圓，並把質點看成位於 P 的單位質量的點，它在軸上，與圓心 O 的距離為 x。圓環上每一點與 P 的距離都相同，同為

$$d = \sqrt{x^2 + r^2}$$

這可由 P、O 和該點所組成的直角三角形，用畢氏定理（Pythagoras' theorem）得出。

方向。把圓環上位於 A 的每一小段，與位於直徑另一端 A' 的相等小段配成一對。它們與 P 的距離同為 d，所以它們分別沿 PA 和 PA' 施加大小相等的拉力。這兩條直線關於軸互為反射，所以垂直於軸的分量互相抵銷，而沿軸的分量則相加，兩者都由 P 指向

O。整個圓環正是由這樣的一對對小段組成，所以質點所受的合力沿着軸，指向圓環的中心。



大小。質量為 δm 的一小段，以大小為 $G\,\delta m/d^2$ 的力沿 PA 拉動質點。設 α 為 PA 與軸 PO 之間的夾角，則 $\cos\alpha = x/d$，所以這個力指向 O 的分量為

$$\frac{G\,\delta m}{d^2}\cdot\frac{x}{d} = \frac{Gx\,\delta m}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$

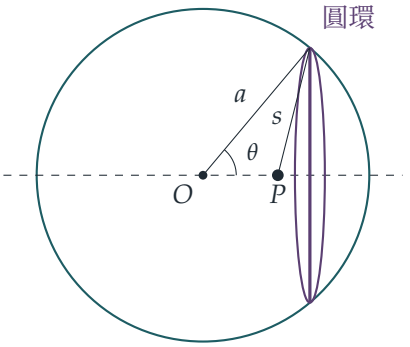
與 δm 相乘的因子對每一小段都相同，所以對整個圓環求和，只需把 δm 換成 m：

$$F = \frac{Gmx}{(x^2+r^2)^{3/2}},$$

方向指向圓心，正如題目所求。如果 P 在圓環的另一側，只要把 x 換成 $|x|$，結果仍然成立；在下一部分，我們會把 x 當作有向距離（signed distance）使用，這時代入帶正負號的 x，公式便正確地給出力的有向分量。

球殼

設球殼的中心為 O，半徑為 a，質量為 M，則它的面密度（surface density）為 $M/(4\pi a^2)$。把質點放在 P，其中 $OP = b < a$。若 $b = 0$，從 O 出發的每個方向都沒有分別，球殼上位置相對的點的拉力互相抵銷，所以力為零。以下取 $0 < b < a$，並以直線 OP 為軸，由 O 起沿指向 P 的方向量度距離。



用垂直於 OP 的平面把球殼切成許多薄圓環。位於極角（polar angle）θ 與 $\theta+\delta\theta$ 之間的圓環（極角在 O 處由 OP 方向起量度），半徑為 $a\sin\theta$，圓心位於軸上 $a\cos\theta$ 的位置，寬度為 $a\,\delta\theta$。它的質量是

$$\delta M = \frac{M}{4\pi a^2}\cdot 2\pi a\sin\theta\cdot a\,\delta\theta = \tfrac{1}{2}M\sin\theta\,\delta\theta.$$

這個圓環的圓心與 P 的有向距離為 $a\cos\theta-b$。根據圓環的結果，它對 P 的拉力沿着軸，而這個拉力在正方向（背離 O、穿過 P 的方向）上的分量為

$$\frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta-b)}{\big((a\cos\theta-b)^2+a^2\sin^2\theta\big)^{3/2}} = \frac{G\,\delta M\,(a\cos\theta-b)}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}}.$$

這個正負號的約定在兩種情況下都正確：當 $a\cos\theta>b$ 時，圓環在 P 的外側，拉力指向正方向；當 $a\cos\theta<b$ 時，拉力指向相反方向。每個圓環的拉力都沿着同一條軸，所以總力沿着 OP，其分量為

$$F = \frac{GM}{2}\int_0^{\pi}\frac{(a\cos\theta-b)\sin\theta}{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{3/2}}\,\mathrm{d}\theta.$$

想一想 用甚麼代換可以馴服這個分母？

根據餘弦定理（cosine rule），$a^2+b^2-2ab\cos\theta$ 這個量正是 s 的平方，即 P 到圓環的距離的平方（圖中標示為 s 的線段）。因此我們作代換

$$s^2 = a^2+b^2-2ab\cos\theta, \qquad 2s\,\mathrm{d}s = 2ab\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

當 θ 由 0 變到 π 時，s 由 $a-b$ 遞增至 $a+b$（由於 $b<a$，前者為正數）。此外，

$$a\cos\theta-b = \frac{a^2+b^2-s^2}{2b}-b = \frac{a^2-b^2-s^2}{2b}.$$

利用 $\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{s\,\mathrm{d}s}{ab}$，

$$\begin{aligned}F &= \frac{GM}{2}\int_{a-b}^{a+b}\frac{a^2-b^2-s^2}{2b}\cdot\frac{1}{s^3}\cdot\frac{s}{ab}\,\mathrm{d}s = \frac{GM}{4ab^2}\int_{a-b}^{a+b}\left(\frac{a^2-b^2}{s^2}-1\right)\mathrm{d}s\\ &= \frac{GM}{4ab^2}\left[-\frac{a^2-b^2}{s}-s\right]_{a-b}^{a+b}.\end{aligned}$$

在 $s=a+b$ 時，方括號內的值是 $-(a-b)-(a+b)=-2a$；在 $s=a-b$ 時，它是 $-(a+b)-(a-b)=-2a$。兩者相等，所以

$$F = \frac{GM}{4ab^2}\big(-2a-(-2a)\big) = 0.$$

力沿着 OP，而它沿 OP 的分量為零，所以質點不受球殼的任何引力，正如題目所求。

驗算

- 圓環：在 $x = 0$ 時力為零（質點位於圓心，各方的拉力互相平衡）；而當 $x \gg r$ 時，力趨向 Gm/x^2，就像全部質量都集中在 O 一樣。
- 球殼，質點在外：如果改為 $b > a$，積分下限變成 $s = b - a$，方括號在該處的值是 $(a + b) - (b - a) = 2a$。於是 $F = \frac{GM}{4ab^2}(-4a) = -GM/b^2$：這是一個指向 O 的吸引力，就像全部質量都集中在中心一樣。這正是牛頓（Newton）的另一條球殼定理（shell theorem），可見積分應該沒有算錯。
- 數值驗證：把 2000 個點質量沿圓環排列再求和，結果與公式吻合至小數點後十位。對 θ 的積分使用辛普森法則（Simpson's rule），在隨機選取的幾個 $b < a$ 下，所得的值約為 10^{-15}；另外用蒙地卡羅方法（Monte Carlo）在球殼上隨機取 2×10^5 個點，取 $a = 2$、$b = 1.3$、$GM = 1$，所得的力小於 10^{-3}，而典型的量級是 $GM/a^2 = 0.25$。

常見錯誤

- 把圓環的質量元素取為 $M\,\delta\theta/\pi$。靠近 $\theta = \pi/2$ 的圓環較大，所以質量與 $\sin\theta\,\delta\theta$ 成正比，而不是與 $\delta\theta$ 成正比。
- 在圓環公式中使用 $|a\cos\theta - b|$。位於 P 兩側的圓環，拉力方向相反，而這種抵銷正是整個問題的關鍵。
- 弄錯 s 的上下限：在 $\theta = 0$ 時，距離是 $a - b$ 而不是 $b - a$，因為 P 在球殼之內。

STEP 之外

這就是牛頓的球殼定理，而利用引力的高斯定律（Gauss's law），它有一個更簡潔的證明：引力場穿過任何閉曲面的通量（flux），與曲面內的質量成正比，所以根據對稱性，空心球殼內部的引力場必定為零。同樣的數學也可以給出勢（potential），而球殼內部的勢是常數這一事實，正是調和函數（harmonic function）的一個早期例子；調和函數是大學一年級向量微積分（vector calculus）的研習內容。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對球殼定理和引力勢有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。