詳細解答

STEP III 1999，第 8 題

純數學 • 分段微分方程

> **STEP III 1999，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q8

關鍵思路

在每個區間上，方程都是頻率固定的簡諧運動（simple harmonic motion），所以該區間上的通解（general solution）是 $\cos nx$ 與 $\sin nx$ 的組合。唯一要做的工夫是銜接：連續性條件（continuity conditions）把上一個區間末端的 y 和 y' 的值，交給下一個區間作為起始值。各區間的長度都是 2π，結果每次的起始值都相同，於是出現一個規律，我們可以用歸納法（induction）加以證明。

解答

第 (i) 部分

當 $0 < x < 2\pi$ 時，$n = 1$，所以 $y'' + y = 0$，其通解為

$$y = A\cos x + B\sin x.$$

由於 y 和 y' 在 $x = 0$ 連續，條件 $y(0) = 0$ 和 $y'(0) = 1$ 適用於這個解：$y(0) = A = 0$ 及 $y'(0) = B = 1$。因此

$$y = \sin x \qquad (0 \le x \le 2\pi).$$

在右端，$y(2\pi) = \sin 2\pi = 0$ 及 $y'(2\pi) = \cos 2\pi = 1$。

第 (ii) 部分

當 $2\pi < x < 4\pi$ 時，$n = 2$，所以 $y'' + 4y = 0$，且

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

由 y 和 y' 在 $x = 2\pi$ 的連續性，這個解在該處必須滿足 $y = 0$ 和 $y' = 1$，即第 (i) 部分末尾求得的值。由於 $\cos 4\pi = 1$ 及 $\sin 4\pi = 0$，

$$y(2\pi) = A = 0, \qquad y'(2\pi) = 2B\cos 4\pi = 2B = 1,$$

所以 $B = \frac{1}{2}$，而當 $2\pi \le x \le 4\pi$ 時 $y = \frac{1}{2}\sin 2x$，正如題目所求。

留意這裏同樣有 $y(4\pi) = \frac{1}{2}\sin 8\pi = 0$ 及 $y'(4\pi) = \cos 8\pi = 1$：下一個區間的起始值完全一樣。由此可提出以下斷言。

斷言。對每個正整數 n，

$$y = \frac{1}{n}\sin nx \qquad \text{對於} 2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi.$$

用歸納法證明。$n = 1$ 的情況就是第 (i) 部分。假設斷言對 $n = k$ 成立。在 $x = 2k\pi$ 處，前一段給出

$$y = \frac{1}{k}\sin(2k^2\pi) = 0, \qquad y' = \cos(2k^2\pi) = 1,$$

因為 $2k^2\pi$ 是 2π 的整數倍。在 $2k\pi < x < 2(k+1)\pi$ 上，方程為 $y'' + (k+1)^2 y = 0$，所以

$$y = A\cos(k+1)x + B\sin(k+1)x.$$

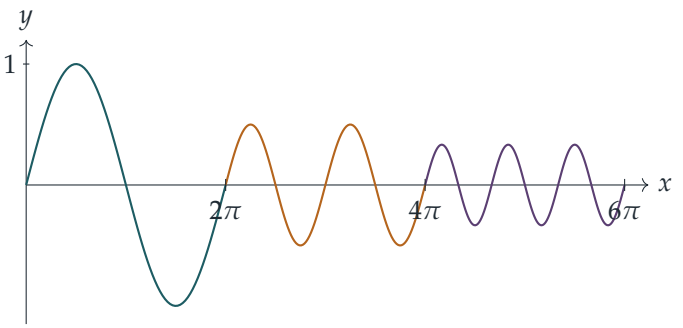
? **想一想** 在左端 $x = 2k\pi$ 處，$\cos(k+1)x$ 和 $\sin(k+1)x$ 的值是多少？

在該處 $(k+1)x = 2k(k+1)\pi$，同樣是 2π 的整數倍，所以餘弦值是 1，正弦值是 0。因此由 y 和 y' 在 $x = 2k\pi$ 的連續性可得

$$A = 0, \qquad (k+1)B = 1,$$

所以在 $2k\pi \le x \le 2(k+1)\pi$ 上 $y = \dfrac{1}{k+1}\sin(k+1)x$。這正是 $n = k+1$ 時的斷言，故由歸納法，斷言對所有 $n \ge 1$ 成立。 □

所以只要 $2(n-1)\pi \le x \le 2n\pi$，就有 $y(x) = \dfrac{1}{n}\sin nx$。(在每個接合點 $x = 2n\pi$，相鄰兩條公式都給出 $y = 0$，所以並無歧義。)



第 (iii) 部分

利用第 (ii) 部分，在第 n 個區間上

$$\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\int_{2(n-1)\pi}^{2n\pi} (1-\cos 2nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{n^2},$$

因為 $\sin 2nx$ 在上下限處都等於零（每個積分限都是 π 的倍數，而 $2n$ 是整數），所以餘弦項的積分為零。

把首 N 個區間加起來，

$$\int_0^{2N\pi} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}.$$

這個無窮積分（infinite integral）就是 $\int_0^X y^2\,\mathrm{d}x$ 當 $X\to\infty$ 時的極限。由於 $y^2\ge 0$，它是 X 的遞增函數；而當 $2(N-1)\pi \le X \le 2N\pi$ 時，它介乎在 $2(N-1)\pi$ 與 $2N\pi$ 處的值之間。由於級數收斂（converges），當 $N\to\infty$ 時這兩個值都趨向 $\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。因此

$$\int_0^{\infty} y^2\,\mathrm{d}x = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

正如題目所求。

驗算

- 每一段 $\frac{1}{n}\sin nx$ 都滿足 $y''=-n^2y$，起點處 $y=0$、$y'=1$，終點處亦是 $y=0$、$y'=1$，所以各段在函數值和斜率上都平滑地接合。
- 以數值方法（四階龍格－庫塔法，fourth-order Runge–Kutta）逐步求解這條微分方程（differential equation），走過首六個區間，所得結果與 $\frac{1}{n}\sin nx$ 相差不超過 10^{-10}，而 y^2 由起點至 12π 的積分算得 4.685336，與 $\pi(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{36})$ 吻合。
- 利用歐拉（Euler）的結果 $\sum 1/n^2=\pi^2/6$，這個積分等於 $\pi^3/6\approx 5.168$。

常見錯誤

- 在每個區間上都把初始條件（initial conditions）用於 $x=0$，而不是用於該區間的左端 $x=2(n-1)\pi$。這樣做在本題碰巧得出正確答案，只因為起點是 2π 的倍數，而這一點必須寫明。
- 忘記 $y'=nB\cos nx$：正是因子 n 產生了振幅（amplitude）$\frac{1}{n}$。
- 把積分寫成無窮級數之和，卻沒有說明極限為何存在；y^2 非負，令這一步很容易說明。

STEP 之外

這是係數為分段常數（piecewise-constant）的微分方程的一個簡單例子，這類方程可用來描述一個勁度在固定時刻切換的彈簧；在每次切換時，即使 y'' 出現跳躍，解仍然連續且可微。最後的答案 $\pi^3/6$ 把一條微分方程與巴塞爾和（Basel sum）$\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ 聯繫起來；在大學本科的傅立葉級數（Fourier series）課程中，這個和通常最先是用帕塞瓦爾定理（Parseval's theorem）證明的。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科書）同時涵蓋二階線性方程和傅立葉級數。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。