詳細解答

STEP III 1999，第 7 題

純數學 • 群與同構

> **STEP III 1999，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q7

關鍵思路

表達式 $x+y+axy$ 幾乎就是一個乘積。乘以 a 再加上 1，可得

$$1+a(x*y) = 1+ax+ay+a^2xy = (1+ax)(1+ay),$$

所以在變數代換（change of variable）$X = 1+ax$ 之下，運算 $*$ 其實只是喬裝了的普通乘法。羣（group）的每一項性質，都可由乘法的相應性質得出，而我們必須剔除的那個數，正是對應於 $X=0$ 的那一個。

解答

以下一律記 $\phi(x) = 1+ax$。由於 $a \neq 0$，ϕ 是由 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的雙射（bijection），所以兩個實數 u, v 相等，當且僅當 $\phi(u) = \phi(v)$。上面的恆等式可寫成

$$\phi(x*y) = \phi(x)\,\phi(y) \qquad \text{對所有實數} x, y. \tag{†}$$

結合律

在等式兩邊各用 (†) 兩次，

$$\phi((x*y)*z) = \phi(x*y)\,\phi(z) = \phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z),$$
$$\phi(x*(y*z)) = \phi(x)\,\phi(y*z) = \phi(x)\,\phi(y)\,\phi(z).$$

由於實數乘法符合結合律（associativity），這兩式相等；又因為 ϕ 是一對一（one-to-one）的，所以 $(x*y)*z = x*(y*z)$。因此 $*$ 符合結合律。

（如果你想直接驗證：$(x*y)*z$ 和 $x*(y*z)$ 展開後都是對稱的表達式 $x+y+z+a(xy+yz+zx)+a^2xyz$。）

羣

想一想 要剔除的是哪一個數？為甚麼不能保留整個 $\mathbb{R}$？

在 ϕ 之下，$x = -\frac{1}{a}$ 這個數對應於 $\phi(x) = 0$，而 0 沒有乘法逆元(multiplicative inverse)。具體來說，對任何實數 y，

$$\left(-\tfrac{1}{a}\right) * y = -\tfrac{1}{a} + y - y = -\tfrac{1}{a},$$

所以 $-\frac{1}{a}$ 會把一切都吸收掉，無論與甚麼元素結合，都不可能得出單位元（identity）。因此我們取

$$G = \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{1}{a}\right\},$$

這正是所有滿足 $\phi(x) \neq 0$ 的 x 所組成的集合。我們逐一驗證四條公理。

封閉性（*closure*）。若 $x, y \in G$，則 $\phi(x) \neq 0$ 且 $\phi(y) \neq 0$，所以由 (†) 得 $\phi(x * y) = \phi(x)\phi(y) \neq 0$。故此 $x * y \neq -\frac{1}{a}$，而 $x * y$ 當然是實數，所以 $x * y \in G$。

結合律。上面已對所有實數證明了這一點，所以對 G 的元素自然也成立。

單位元。對每個 x，都有 $x * 0 = x + 0 + 0 = x$ 及 $0 * x = x$，而且因為 $\phi(0) = 1 \neq 0$，所以 $0 \in G$。因此 0 是單位元。(這與 $\phi(0) = 1$ 吻合，即對應乘法的單位元。)

逆元（*inverse*）。給定 $x \in G$，我們要找 y 使得 $x * y = 0$，即 $x + y(1 + ax) = 0$。由於 $1 + ax \neq 0$，可以相除，得出

$$x^{-1} = \frac{-x}{1 + ax}.$$

這個數屬於 G，因為

$$\phi\left(\frac{-x}{1+ax}\right) = 1 - \frac{ax}{1+ax} = \frac{1}{1+ax} \neq 0,$$

而且由於 $*$ 是可交換（commutative）的（從公式明顯可見 $x * y = y * x$），所以同樣有 $x^{-1} * x = 0$。

四條公理全部成立，所以 $(G, *)$ 是一個羣（事實上是阿貝爾羣（abelian group）），其中被剔除的數是 $-\frac{1}{a}$。

2 階子羣

非零實數的乘法羣有子羣 (subgroup) $\{1, -1\}$。把它經 ϕ 拉回來：$\phi(x) = 1$ 給出 $x = 0$，而 $\phi(x) = -1$ 給出 $x = -\frac{2}{a}$。所以我們嘗試

$$H = \left\{0, -\tfrac{2}{a}\right\}.$$

這是 G 中兩個不同的元素（因為 $a \neq 0$，$-\frac{2}{a} \neq 0$ 且 $-\frac{2}{a} \neq -\frac{1}{a}$）。直接計算，

$$\left(-\tfrac{2}{a}\right) * \left(-\tfrac{2}{a}\right) = -\tfrac{4}{a} + a \cdot \tfrac{4}{a^2} = 0,$$

以及 $0*0=0$，$0*\left(-\frac{2}{a}\right)=-\frac{2}{a}$。所以 H 是封閉的，包含單位元，而且每個元素都是自己的逆元。因此 H 是 $(G,*)$ 的子羣，恰好有兩個元素。

事實上這是唯一的一個：階（order）為 2 的羣必是 $\{e,h\}$，其中 $h*h=e$ 且 $h\neq e$；而 $h*h=0$ 即 $h(2+ah)=0$，所以 $h=-\frac{2}{a}$。

驗算

取 $a=1$。這時 $x*y=x+y+xy=(1+x)(1+y)-1$，被剔除的數是 -1，而 2 階子羣是 $\{0,-2\}$：的確 $(-2)*(-2)=-4+4=0$。此外 $2*3=11$，而 $(1+2)(1+3)=12=1+11$，與 (†) 所預期的一致。我們也用電腦以精確的有理數運算，對約 5000 組隨機選取的 a,x,y,z 驗證了恆等式 (†)、結合律、G 的封閉性、單位元 0、逆元公式，以及 $\{0,-\frac{2}{a}\}$ 的封閉性。

常見錯誤

- 忘記驗證逆元 $\frac{-x}{1+ax}$ 本身屬於 G，或忘記驗證 $x*y$ 永遠不會等於被剔除的那個數。正是封閉性這條公理，說明了為何要剔除的恰好是一個點。
- 以 $\{0\}$ 或 $\{0,-\frac{1}{a}\}$ 作為所求的子羣：前者只有一個元素，而 $-\frac{1}{a}$ 根本不在 G 之中。

STEP 之外

映射 $\phi(x)=1+ax$ 是由 $(G,*)$ 到羣 $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\times)$ 的同構（*isomorphism*）：即一個把其中一種運算變成另一種運算的雙射。一旦找到同構，所有結構上的事實都可以不費吹灰之力地搬過去，這就是為甚麼 $(G,*)$ 恰好只有一個 2 階元素，正如 $\times$ 之下只有 -1 一樣。同構，以及兩個羣可以外表不同卻「相同」這個想法，是抽象代數（abstract algebra）入門課程的核心；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups* 是閱讀這方面內容的好選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。