詳細解答

STEP III 1999，第 6 題

純數學 • 參數曲線與面積

STEP III 1999，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/99-s3-q6

關鍵思路

方程其實是說 $(x^{1/n})^2 + (y^{1/n})^2 = (a^{1/n})^2$，這是一個喬裝了的圓。所以，像處理圓那樣，設 $x^{1/n} = a^{1/n}\cos t$ 及 $y^{1/n} = a^{1/n}\sin t$，然後取 n 次方。正因為 n 是奇數，我們才可以取負數的實 n 次方根，所以曲線遍佈全部四個象限。

解答

參數化

因為 n 是奇數，每個實數 x 都恰好有一個實 n 次方根 $x^{1/n}$，其正負號與 x 相同，而 $x^{2/n}$ 的意思就是 $(x^{1/n})^2$。設 $X = x^{1/n}$、$Y = y^{1/n}$ 及 $R = a^{1/n} > 0$，方程 $(*)$ 變成

$$X^2 + Y^2 = R^2,$$

這是一個半徑為 R 的圓，我們以 $X = R\cos t$、$Y = R\sin t$ 把它參數化（parametrise）。取 n 次方（由於 n 是奇數，這是 $\mathbb{R}$ 上的一個雙射（bijection））便得

$$\boxed{x = a\cos^n t, \qquad y = a\sin^n t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.}$$

曲線上每一點都可以這樣得出，因為圓上每一點 (X, Y) 都可以這樣得出。

? **想一想** 為甚麼這是逆時針方向，而不僅僅是「某種」繞行曲線的方式？

映射 $(X, Y) \mapsto (X^n, Y^n)$ 保持每個坐標的正負號不變，所以它把每個象限映到自身。當 t 由 0 增至 2π 時，點 $(R\cos t, R\sin t)$ 沿逆時針方向繞圓一周，依次經過正 x 軸、第一象限、正 y 軸、第二象限，如此類推。它的像 (x, y) 以相同的次序經過相同的軸和象限，

所以也是沿逆時針方向繞原點一周。（例如在第一象限內，$x = a\cos^n t$ 由 a 遞減至 0，而 $y = a\sin^n t$ 則由 0 遞增至 a。）當 $n = 1$ 時，這就是我們熟悉的圓 $x = a\cos t$、$y = a\sin t$。

$n = 3$ 時的草圖

現在 $x = a\cos^3 t$、$y = a\sin^3 t$，而曲線是 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$。

對稱性。方程在 $x \mapsto -x$、$y \mapsto -y$ 以及 x 與 y 互換之下都保持不變。所以曲線對兩條坐標軸以及直線 $y = \pm x$ 都對稱，我們只需研究第一象限，即 $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$。

截距。當 $t = 0$ 時，我們位於 $(a, 0)$；當 $t = \frac{\pi}{2}$ 時，位於 $(0, a)$。根據對稱性，曲線只在 $(\pm a, 0)$ 和 $(0, \pm a)$ 與坐標軸相交。在直線 $y = x$ 上（即 $t = \frac{\pi}{4}$ 時），我們位於 $(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}})$，沿每條軸的方向只走了約 $0.35a$。

斜率。我們有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -3a\cos^2 t\sin t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3a\sin^2 t\cos t,$$

所以當 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 時

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t.$$

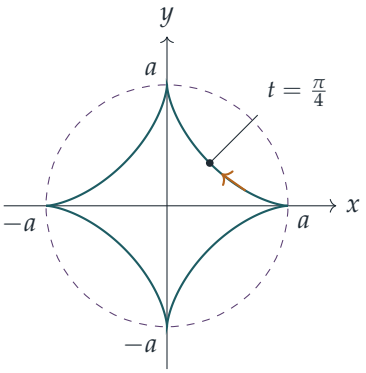
當 $t \to 0$ 時，這個值趨向 0；當 $t \to \frac{\pi}{2}$ 時，它趨向 $-\infty$。所以曲線到達 $(a, 0)$ 時與 x 軸相切，到達 $(0, a)$ 時與 y 軸相切。$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 在 $t = 0$ 和 $t = \frac{\pi}{2}$ 時都等於零。第一象限的弧與由第四象限反射而來的弧在 $(a, 0)$ 相遇，而且兩者在該處都與 x 軸相切，所以兩段弧會合成一個尖點。曲線在 $(\pm a, 0)$、$(0, \pm a)$ 這四點有尖點（cusp）。

凹凸性。把 $-\tan t$ 對 x 求導，

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3a\cos^4 t\sin t} > 0 \quad \text{當} 0 < t < \tfrac{\pi}{2}.$$

所以第一象限的弧是凸（convex）的：它向原點彎入，而不像圓那樣向外彎。它位於其弦 $x + y = a$ 的下方。事實上 $\cos^3 t + \sin^3 t \le \cos^2 t + \sin^2 t = 1$，等號只在尖點成立。

綜合以上各點，便得到一個四角星形（星形線（astroid））。下圖畫出這條曲線，並以虛線畫出半徑為 a 的圓作比較。



$n = 3$ 時的面積

利用上面的導數，

$$\begin{aligned} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a\cos^3 t \cdot 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t = \tfrac{3}{4}a^2\sin^2 2t. \end{aligned}$$

由於 $\sin^2 2t = \frac{1}{2}(1-\cos 4t)$，而 $\cos 4t$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的積分為零，

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,\mathrm{d}t = \pi.$$

因此

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a^2}{4}\cdot\pi = \boxed{\frac{3\pi a^2}{8}}.$$

公式給出正的面積，是因為曲線是沿逆時針方向繞行的，這正是第一部分中方向之所以重要的原因。

驗算

- 星形線位於菱形 $|x| + |y| \le a$ 之內，而這個菱形的面積是 $2a^2$，所以答案必定小於 $2a^2$。果然 $\frac{3\pi}{8}a^2 \approx 1.178a^2$。
- 作為一個不用該公式的驗算，取 $a = 1$，以數值方法計算 $4\int_0^a \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}\mathrm{d}x$，得 $1.178097\ldots$，與 $3\pi/8 = 1.1780972\ldots$ 吻合。
- 當 $n = 1$ 時，同樣的方法給出 $x\dot{y} - y\dot{x} = a^2$ 及 $A = \pi a^2$，即圓的面積，正如所料。

常見錯誤

- 寫下 $x = a\cos^n t$ 卻沒有解釋為甚麼 x 可以是負數。正是因為 n 是奇數，$x^{2/n}$ 在 $x < 0$ 時才有意義（參數化也才是完整的）。
- 把曲線畫成像壓扁了的圓那樣向外鼓出。二階導數顯示它是向內彎的，並在坐標軸上有尖點。
- 只在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上積分而忘記乘以 4，或在 $-y\,\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 一項弄錯正負號（兩項最終都是正的）。

STEP 之外

這條面積公式是格林定理（Green's theorem）的特殊情況；格林定理把一個區域上的積分轉化為沿其邊界的積分。它也是求積儀（planimeter）背後的原理，求積儀是一種沿邊界描畫便能量度面積的機械儀器。像 $|x|^p + |y|^p = 1$ 這類曲線，也給出 ℓ^p 範數（norm）的「單位圓」，你會在分析和線性代數中遇到它們；星形線是 $p = \frac{2}{3}$ 的情況，它不是凸的，所以並不給出一個範數。星形線也是一個圓在半徑為其四倍的圓內滾動時，圓上一點所描出的軌跡。想看更多同類型的題目，可參閱 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。