詳細解答

STEP III 1999，第 5 題

純數學 • 斐波那契恆等式與數學歸納法

> **STEP III 1999，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/99-s3-q5

關鍵思路

這其實是斐波那契數列（Fibonacci sequence），只是下標移了一位，使得 $u_n = F_{n+1}$。要證第一個恆等式（identity），可把 u_{n+2} 和 u_{n-1} 都用中間的一對 u_{n+1}、u_n 表示：交叉項隨即互相抵消。至於倍增公式（doubling formulae），應以歸納法（induction）把兩個命題一併證明，因為兩者透過遞推關係（recurrence）互相支援。第一個恆等式正是完成奇數情況所需的工具。

解答

第一個恆等式

固定 $n \geq 1$，使得 u_{n-1}、u_n、u_{n+1}、u_{n+2} 全部有定義。由遞推關係可得

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \qquad 及 \qquad u_{n-1} = u_{n+1} - u_n,$$

其中第二式來自 $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$。兩式分別平方後相加，

$$\begin{aligned} u_{n+2}^2 + u_{n-1}^2 &= (u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}u_n + u_n^2) + (u_{n+1}^2 - 2u_{n+1}u_n + u_n^2) \\ &= 2(u_{n+1}^2 + u_n^2), \end{aligned}$$

這就是所求的恆等式。

倍增公式

以 $P(n)$ 表示以下兩式同時成立的命題：

$$u_{2n} = u_n^2 + u_{n-1}^2 \qquad 及 \qquad u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2.$$

數列的首幾項為 $u_0, u_1, \cdots = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$。

基礎情況。當 $n = 1$ 時：$u_2 = 2 = 1^2 + 1^2 = u_1^2 + u_0^2$，而 $u_3 = 3 = 2^2 - 1^2 = u_2^2 - u_0^2$。所以 $P(1)$ 成立。

> ? **想一想** 為甚麼要把兩條公式一併證明，而不是逐條證明？

要由遞推關係求得 u_{2n+2}，我們需要 u_{2n+1} 和 u_{2n}，所以 $n+1$ 時的偶數項公式需要用到 n 時的兩條公式。其後 $n+1$ 時的奇數項公式又需要用到 $n+1$ 時的偶數項公式。兩個命題都無法單獨向前推進。

歸納步驟。假設 $P(n)$ 對某個 $n \geq 1$ 成立。

偶數項。先用遞推關係，再用 $P(n)$，

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= u_{2n+1} + u_{2n} \\ &= (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + (u_n^2 + u_{n-1}^2) \\ &= u_{n+1}^2 + u_n^2, \end{aligned}$$

這就是把 n 換成 $n+1$ 後的偶數項公式。

奇數項。利用遞推關係、剛證得的一式以及 $P(n)$，

$$\begin{aligned} u_{2n+3} &= u_{2n+2} + u_{2n+1} \\ &= (u_{n+1}^2 + u_n^2) + (u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) \\ &= 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2. \end{aligned}$$

我們希望這等於 $u_{n+2}^2 - u_n^2$，而第一個恆等式正好在這裏派上用場。由於 $n \geq 1$，該恆等式給出 $u_{n+2}^2 = 2u_{n+1}^2 + 2u_n^2 - u_{n-1}^2$，所以

$$u_{n+2}^2 - u_n^2 = 2u_{n+1}^2 + u_n^2 - u_{n-1}^2 = u_{2n+3}.$$

這就是把 n 換成 $n+1$ 後的奇數項公式，因為 $2(n+1)+1 = 2n+3$，而 $(n+1) \pm 1 = n+2,\ n$。

因此 $P(n)$ 蘊涵 $P(n+1)$。連同基礎情況，由歸納法可知 $P(n)$ 對所有正整數 n 成立。

驗算

試取 $n = 5$：$u_{10} = 89$，而 $u_5^2 + u_4^2 = 64 + 25 = 89$；$u_{11} = 144$，而 $u_6^2 - u_4^2 = 169 - 25 = 144$。我們以精確的整數運算，對所有 $n \leq 299$ 驗證了第一個恆等式，並對所有 $n \leq 189$ 驗證了兩條倍增公式。另外留意 $u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1}) = u_n(u_{n+1} + u_{n-1})$，這是奇數項另一個方便好用的形式。

常見錯誤

- 只對偶數項公式作歸納：歸納步驟需要 u_{2n+1}，於是無法繼續。
- 在 $n = 0$ 時使用第一個恆等式，但此時 u_{-1} 並無定義。在歸納步驟中，我們只在 $n \geq 1$ 時使用它。
- 忘記這裏的下標與慣常的斐波那契數相比移了一位（$u_0 = u_1 = 1$），以致用錯誤的數值驗證基礎情況。

STEP 之外

倍增公式讓你只需大約 $\log_2 N$ 步便可算出 u_N，方法是把 N 反覆減半：這就是「快速倍增」(fast doubling) 法，與快速冪 (fast exponentiation) 算法一脈相承。它背後是矩陣恆等式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$，把這個矩陣平方，便可一次過得出兩條公式。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）透過這個矩陣的冪和特徵值（eigenvalues）來處理斐波那契數；而在 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（數論入門）中，講連分數（continued fractions）的一章會再次遇上相鄰斐波那契數之比，它們正是黃金比（golden ratio）的漸近分數（convergents）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。